Représentations lisses de $\mathrm{GL}(m, D)$
II : β-extensions

Vincent Sécherre

Abstract

This work is concerned with type theory for reductive groups over a non Archimedean field. Given such a field F, and a division algebra D of finite dimension over its center F, we obtain results concerning the construction of simple types for the group $\mathrm{GL}(m, D)$, $m \geqslant 1$. More precisely, for each simple stratum of the matrix algebra $\mathrm{M}(m, D)$, we produce a set of β-extensions in the sense of Bushnell and Kutzko.

Introduction

Dans toute cette introduction, la lettre F désigne un corps local commutatif non archimédien, de caractéristique résiduelle p, et la lettre G désigne le groupe des F-points d'un groupe réductif connexe défini sur F. Le groupe G est un groupe localement profini, et la question se pose d'étudier la catégorie $\mathscr{R}(G)$ de ses représentations lisses complexes. On sait (voir [1]) que, *via* le principe de l'induction parabolique, cette catégorie se décompose en un produit infini de sous-catégories abéliennes, appelées blocs de Bernstein. La théorie des types, élaborée par Bushnell et Kutzko ([10]), constitue un moyen de décrire ces blocs comme des catégories de modules sur certaines $\mathbb{C}$-algèbres liées à l'algèbre de Hecke $\mathscr{H}(G)$, l'algèbre de convolution des fonctions localement constantes à support compact de G dans $\mathbb{C}$. Le présent travail est une contribution à cette théorie pour les groupes de la forme $\mathrm{GL}(m, D)$, où $m \geqslant 1$ et où D est une algèbre à division de dimension finie sur son centre F. Désormais, dans tout ce qui suit, la lettre G désigne le groupe $\mathrm{GL}(m, D)$.

Pour l'essentiel, le programme préconisé par la théorie des types consiste en la construction d'une famille de couples (K, ρ), constitués d'un sous-groupe ouvert compact K de G et d'une représentation lisse irréductible ρ de K, vérifiant la propriété suivante :

(T) À tout bloc de Bernstein $\mathscr{B}$ de $\mathscr{R}(G)$ correspond, à G-conjugaison près, un unique couple (K, ρ) tel que les objets irréductibles de $\mathscr{B}$ sont exactement les représentations lisses irréductibles de G dont la restriction à K contient ρ.

Si la condition (T) est remplie, le couple (K, ρ) est appelé un *type*, et le bloc de Bernstein $\mathscr{B}$ est équivalent à la catégorie des modules à droites sur $\mathscr{H}(G, \rho)$, l'algèbre d'entrelacement de ρ, qui peut être définie comme l'algèbre des endomorphismes de l'induite compacte de ρ à G. Il reste alors à déterminer la structure de $\mathscr{H}(G, \rho)$.

Dans un travail monumental ([9], [11]), Bushnell et Kutzko ont obtenu une liste complète de types pour le groupe déployé $\mathrm{GL}(m, F)$, ainsi que la structure de leurs algèbres d'entrelacement. Le langage des strates simples, développé dans [9], permet de construire une première famille de types, qualifiés de *simples*, à partir de laquelle sont construits tous les autres types. On peut brièvement résumer les trois étapes de la construction d'un type simple de la manière suivante :

2000 Mathematics Subject Classification 22E50
Keywords: Reductive group, smooth representation, simple type, β-extension, affine building.

i) à toute strate simple, on associe un ensemble fini de caractères simples ;

ii) à tout caractère simple, on associe un ensemble fini de β-extensions ;

iii) à toute β-extension, on associe un ensemble fini de types simples.

Dans un premier travail (voir [14]), nous avons accompli, pour le groupe $\mathrm{GL}(m, D)$, l'étape i) de ce programme en attribuant à toute strate simple de l'algèbre de matrices $A = \mathrm{M}(m, D)$ un ensemble de caractères simples. Le présent article concerne l'étape ii) : nous associons à tout caractère simple θ construit dans *ibid.* un ensemble fini $\mathrm{Be}(\theta)$ de β-extensions de la représentation de Heisenberg de θ.

La description de ce travail, et notamment la mise en évidence des différences entre les cas déployé et non déployé, nécessite de préciser la notion de strate simple. Une strate simple de $A = \mathrm{M}(m, D)$ est pour l'essentiel constituée de deux objets. Le premier d'entre eux est un élément β de l'algèbre A qui engendre sur F un corps, noté E, et nous désignerons par B le commutant de E dans A. Le second est un ordre héréditaire $\mathfrak{A}$ de A, auquel correspond une filtration décroissante

$$\mathrm{U}(\mathfrak{A}) \supset \mathrm{U}^1(\mathfrak{A}) \supset \mathrm{U}^2(\mathfrak{A}) \supset \cdots$$

du groupe multiplicatif $\mathrm{U}(\mathfrak{A}) = \mathfrak{A}^\times$, constituée de sous-groupes ouverts compacts de G normalisés par $\mathrm{U}(\mathfrak{A})$. La donnée conjointe de β et de $\mathfrak{A}$ constitue une *strate simple* dans l'algèbre A si d'une part le groupe multiplicatif $E^\times$ normalise l'ordre $\mathfrak{A}$, et si d'autre part l'élément β vérifie une condition technique que nous n'énoncerons pas ici (voir [14], définition 2.3). Dans *ibid.*, nous associons à toute strate simple σ de A deux sous-groupes ouverts compacts $J(\sigma)$ et $H(\sigma)$ de G et un ensemble $\mathscr{C}(\sigma)$ de caractères de $H^1(\sigma) = H(\sigma) \cap \mathrm{U}^1(\mathfrak{A})$, qualifiés de *simples* et vérifiant les propriétés suivantes :

i) un caractère simple $\theta \in \mathscr{C}(\sigma)$ est normalisé par $J = J(\sigma)$, et son entrelacement (voir Notations) est exactement égal à $JB^\times J$.

ii) étant donné un caractère simple $\theta \in \mathscr{C}(\sigma)$, il existe une unique représentation irréductible η de $J^1(\sigma) = J \cap \mathrm{U}^1(\mathfrak{A})$, appelée représentation de Heisenberg de θ, dont la restriction à $H^1 = H^1(\sigma)$ contient θ. Son entrelacement est égal à $JB^\times J$.

Étant donné un caractère simple $\theta \in \mathscr{C}(\sigma)$, nous nous intéressons maintenant aux éventuels prolongements de η à J. Compte tenu de ii), l'entrelacement d'un tel prolongement sera inclus dans $JB^\times J$. Nous appelons *β-extension* de η un prolongement de η au groupe J dont l'entrelacement est exactement égal à $JB^\times J$. Dans la suite, nous notons $\mathrm{Be}(\theta)$ l'ensemble des β-extensions de la représentation de Heisenberg de θ. Le résultat principal de cet article est le fait que, quel que soit le caractère simple θ, l'ensemble $\mathrm{Be}(\theta)$ n'est pas vide.

Dans cette optique, nous nous inspirons largement des méthodes employées dans [9] par Bushnell et Kutzko, mais des arguments essentiels ne sont pas adaptables dans le cas non déployé. L'une des principales différences tient dans le comportement de l'application

$$\mathfrak{A} \mapsto \mathfrak{A} \cap B \tag{1}$$

entre ordres héréditaires β-purs (c'est-à-dire normalisés par $E^\times$, voir définition 2.1) de A et ordres héréditaires de B. Dans le cas déployé, il s'agit d'une bijection croissante au comportement parfaitement clair, et [9] fait notamment usage des deux propriétés (évidentes) suivantes. Étant donné un ordre β-pur $\mathfrak{A}$:

(P_1) pour tout ordre héréditaire $\mathfrak{B}'$ inclus dans $\mathfrak{A} \cap B$, il existe un ordre β-pur $\mathfrak{A}'$ dont $\mathfrak{B}'$ est la trace sur B ;

(P_2) pour tout ordre héréditaire $\mathfrak{B}'$ contenant $\mathfrak{A} \cap B$, il existe un ordre β-pur $\mathfrak{A}'$ dont $\mathfrak{B}'$ est la trace sur B.

Dans le cas non déployé, il n'en est rien. L'application (1), quoique toujours surjective, n'est pas bijective en général. La propriété (P_1) est toujours vraie, mais nettement moins simple à prouver. Il s'agit du lemme 1.7, que nous obtenons à l'aide de méthodes faisant intervenir l'immeuble affine de G. La propriété (P_2) est **fausse** en général, ce qui nécessite un remaniement de l'approche de [9] pour la construction de β-extensions.

Dans [9], Bushnell et Kutzko accordent une importance particulière aux strates pour lesquelles l'ordre $\mathfrak{B}$ est maximal, intérêt suscité par l'existence d'une décomposition particulièrement simple de $B^\times$ en doubles classes modulo $\mathrm{U}(\mathfrak{B})$. Se basant notamment sur la propriété (P_1), ils prouvent l'existence de β-extensions lorsque l'ordre $\mathfrak{B}$ est maximal, puis utilisent la propriété (P_2) pour se ramener systématiquement à ce cas.

Notre méthode consiste, plutôt que de se ramener au cas où l'ordre $\mathfrak{B}$ est maximal, à se ramener au cas où il est **minimal**. Pour prouver l'existence de β-extensions lorsque $\mathfrak{B}$ est minimal, nous employons un procédé d'induction parabolique décrit à la section 2.3. Ceci fait, la validité de la propriété (P_1) permet, à partir d'une strate simple $(\beta, \mathfrak{A})$ quelconque, de disposer d'un ordre β-pur $\mathfrak{A}_{\mathrm{m}}$ inclus dans $\mathfrak{A}$ et dont la trace $\mathfrak{B}_{\mathrm{m}}$ sur B est minimale et incluse dans $\mathfrak{A}$. On peut alors associer à un caractère simple quelconque θ une représentation κ de J, prolongeant la représentation de Heisenberg de θ et telle que l'entrelacement de $\kappa|_{\mathrm{U}(\mathfrak{B}_{\mathrm{m}})J^1}$ est égal à $JB^\times J$. Quitte à remplacer $\mathfrak{A}_{\mathrm{m}}$ par l'un de ses $\mathrm{U}(\mathfrak{B})$-conjugués, on voit que $B^\times$ entrelace la représentation κ sur chacun des sous-groupes $K_x = \mathrm{U}(x^{-1}\mathfrak{B}_{\mathrm{m}}x)J^1$, où x décrit $\mathrm{U}(\mathfrak{B})$. Il reste à prouver que cette information est suffisante pour en déduire que $B^\times$ entrelace κ sur J tout entier : c'est l'objet du lemme 1.4, résultat essentiel dans notre méthode, dont la démonstration utilise largement l'immeuble affine de G.

Nous avons réuni dans la première partie les résultats dont la démonstration a nécessité l'emploi de l'immeuble de Bruhat-Tits. Après quelques rappels, nous expliquons dans la section 1.3 comment décrire le fixateur d'une partie de l'appartement en termes de sous-groupes radiciels. Ceci nous mène au premier résultat principal de cette partie, la proposition 1.4. La section 1.4 a pour but d'établir le lemme 1.7, qui est la propriété (P_1).

Dans la seconde partie, nous prouvons l'existence des β-extensions. Après quelques rappels, nous prouvons dans la section 2.2 l'existence de la représentation de Heisenberg d'un caractère simple, ainsi que celle d'un prolongement à J de cette représentation. Dans la section 2.3, nous mettons en route le procédé d'induction parabolique sus-mentionné, dont le but est le théorème 2.19. Dans la section 2.4, nous prouvons l'existence des β-extensions : dans le cas minimal au paragraphe 2.4.1, puis dans le cas général au paragraphe 2.4.2.

Avant de clore cette introduction, je souhaite remercier plusieurs personnes. Tout d'abord Guy Henniart qui m'a guidé pendant toute la durée de ce long travail. Paul Broussous pour son enthousiasme évident et ses relectures de versions préliminaires ; l'idée de la preuve du lemme 1.7, et notamment l'emploi de l'immeuble, lui est dû. Shaun Stevens enfin, qui a participé à la mise au point de la fin de ce travail ; l'idée essentielle de la proposition 1.4, à savoir l'introduction des sous-groupes radiciels et de la propriété (9), lui revient.

Notations

Soit p un nombre premier, et soit F un corps local commutatif non archimédien de caractéristique résiduelle p. Par *F-algèbre* on entendra F-algèbre unitaire de dimension finie. Par *F-algèbre à division* on entendra F-algèbre de centre F dont l'anneau sous-jacent est un corps. Par *extension* *de* F on entendra corps commutatif contenant F. Si K est une extension finie de F, ou bien une F-algèbre à division, on note $\mathfrak{o}_K$ son anneau d'entiers, $\mathfrak{p}_K$ son idéal maximal, $k_K = \mathfrak{o}_K/\mathfrak{p}_K$ son corps résiduel, ϖ_K un générateur de $\mathfrak{p}_K$ et υ_K la valuation normalisée par $\upsilon_K(\varpi_K) = 1$. On note $\mathrm{U}_K = \mathrm{U}_K^0 = \mathfrak{o}_K^\times$ le groupe des unités de $\mathfrak{o}_K$ et, pour tout $i \geqslant 1$, on note $\mathrm{U}_K^i = 1 + \mathfrak{p}_K^i$ son i-ième sous-groupe de congruence. Si K est une F-algèbre à division, la dimension de K sur F est le carré d'un entier noté $d = d_{K/F}$, qui porte le nom de *degré réduit* de K sur F.

On fixe une F-algèbre à division D, de degré réduit $d = d_{D/F}$, et un D-espace vectoriel à droite V de dimension finie $m \geqslant 1$. On note $A = \mathrm{End}_D(V)$ l'algèbre de ses endomorphismes et $G = A^\times$. À tout choix d'une D-base de V correspond un unique isomorphisme de F-algèbres

$$A \simeq \mathrm{M}(m, D) \ , \tag{2}$$

où $\mathrm{M}(m, D)$ désigne l'algèbre des matrices de taille m à coefficients dans D, et la restriction de (2) à G induit un isomorphisme de groupes entre G et $\mathrm{GL}(m, D)$. On note $\mathrm{N}_{A/F}$ la norme réduite sur A et I_m la matrice unité de $\mathrm{M}(m, D)$.

Si X est un groupe, et si S est une partie de X, on note $\langle S\rangle$ le sous-groupe de X qu'elle engendre. Si $x, y \in X$, on note $[x, y] = xyx^{-1}y^{-1}$ leur commutateur. Si X est un groupe topologique, on appelle *caractère* de X un homomorphisme continu de groupes de X dans $\mathbb{C}^\times$. Si X est commutatif, on appelle *dual* de X le groupe de ses caractères, que nous notons $\widehat{X}$. Dans tout ce qui suit, on fixe un caractère additif $\psi_F : F \to \mathbb{C}^\times$ trivial sur $\mathfrak{p}_F$ mais pas sur $\mathfrak{o}_F$, et une uniformisante ϖ_F de F.

Si K est un sous-groupe fermé de G, une représentation *lisse* de K est un couple (π, W) constitué d'un $\mathbb{C}$-espace vectoriel W et d'un homomorphisme π de K dans $\mathrm{GL}(W)$ tel que le stabilisateur de tout vecteur de W est ouvert dans K. Si π est une représentation lisse et χ un caractère de K, on note $\pi \otimes \chi$ la représentation lisse de K définie par $\pi \otimes \chi(g) = \chi(g)\pi(g)$.

Un *opérateur d'entrelacement* entre deux représentations (π_1, W_1) et (π_2, W_2) du groupe K est une application linéaire $f : W_1 \to W_2$ vérifiant, pour tout $g \in K$, l'égalité $f \circ \pi_1(g) = \pi_2(g) \circ f$. Ceux-ci forment un espace vectoriel complexe noté $\mathrm{Hom}_K(\pi_1, \pi_2)$. S'il est de dimension finie, cette dimension est notée $\langle \pi_1, \pi_2\rangle_K$. Pour tout $g \in G$, on note $I_g(\rho) = \mathrm{Hom}_{K\cap K^g}(\rho, \rho^g)$, et on dit que g *entrelace* ρ si $I_g(\rho) \neq (0)$. L'ensemble des éléments de G qui entrelacent ρ, appelé *entrelacement de* ρ *dans* G, est noté $I_G(\rho)$. Notons que si $g \in I_G(\rho)$, il en est de même de tout élément de KgK, de sorte que $I_G(\rho)$ est une réunion de K-doubles classes.

1. Considérations sur l'immeuble

1.1 Ordres héréditaires

Concernant ce qui suit, on pourra également se référer à [7] et [13]. Un $\mathfrak{o}_D$-*réseau* de V est un sous-groupe ouvert compact de V muni d'une structure de sous-$\mathfrak{o}_D$-module de V. Une $\mathfrak{o}_D$-*chaîne* de V est une suite strictement décroissante $\mathscr{L} = (\mathscr{L}_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ de $\mathfrak{o}_D$-réseaux de V, pour laquelle il existe un entier $e \geqslant 1$ tel que $\mathscr{L}_{i+e} = \mathscr{L}_i\mathfrak{p}_D$ pour tout $i \in \mathbb{Z}$. Cet entier est unique, et appelé la *période* de $\mathscr{L}$ sur D. Posons

$$\mathrm{End}_{\mathfrak{o}_D}(\mathscr{L}) = \{a \in A \mid a\mathscr{L}_i \subset \mathscr{L}_i \ , \forall\ i \in \mathbb{Z}\} \ . \tag{3}$$

Une sous-$\mathfrak{o}_F$-algèbre $\mathfrak{A}$ de A est appelée un *ordre héréditaire* s'il existe une $\mathfrak{o}_D$-chaîne $\mathscr{L}$ de V pour laquelle $\mathfrak{A} = \mathrm{End}_{\mathfrak{o}_D}(\mathscr{L})$, et deux chaînes $\mathscr{L}$ et $\mathscr{L}'$ définissent le même ordre héréditaire si et seulement si elles sont translatées l'une de l'autre (ceci n'est pas la définition conventionnelle, que l'on peut trouver dans [13], mais elle lui est équivalente). De ce fait, la *période* d'un ordre héréditaire est celle d'une quelconque $\mathfrak{o}_D$-chaîne le définissant. Si $\mathfrak{A}$ est un ordre héréditaire, son radical (de Jacobson) $\mathfrak{P} = \mathfrak{P}_{\mathfrak{A}}$, c'est-à-dire le plus petit idéal bilatère de $\mathfrak{A}$ pour lequel le quotient $\mathfrak{A}/\mathfrak{P}$ est semi-simple, est inversible, c'est-à-dire qu'il existe un sous-$(\mathfrak{A},\mathfrak{A})$-bimodule $\mathfrak{P}^{-1}$ de A tel que $\mathfrak{P}\mathfrak{P}^{-1} = \mathfrak{P}^{-1}\mathfrak{P} = \mathfrak{A}$, et nous noterons $\mathfrak{P}^i$ la i-ième puissance de $\mathfrak{P}$, pour $i \in \mathbb{Z}$. On désigne par $\mathfrak{K}(\mathfrak{A})$ le normalisateur de $\mathfrak{A}$ dans G, par $\mathrm{U}(\mathfrak{A}) = \mathrm{U}^0(\mathfrak{A})$ son groupe multiplicatif et, pour $i \geqslant 1$, on pose $\mathrm{U}^i(\mathfrak{A}) = 1 + \mathfrak{P}^i$. Les groupes $\mathrm{U}^i(\mathfrak{A}), i \geqslant 0$, sont des sous-groupes ouverts compacts de G distingués dans $\mathfrak{K}(\mathfrak{A})$, formant une filtration

$$\mathfrak{K}(\mathfrak{A}) \supset \mathrm{U}(\mathfrak{A}) \supset \mathrm{U}^1(\mathfrak{A}) \cdots \supset \mathrm{U}^i(\mathfrak{A}) \supset \cdots \tag{4}$$

Si $g \in \mathfrak{K}(\mathfrak{A})$, il existe un unique entier $v \in \mathbb{Z}$ pour lequel $g \cdot \mathscr{L}_i = \mathscr{L}_{i+v}$ pour tout $i \in \mathbb{Z}$. On l'appelle la $\mathfrak{A}$-*valuation* de g et on le note $v_{\mathfrak{A}}(g)$. L'application $v_{\mathfrak{A}} : \mathfrak{K}(\mathfrak{A}) \to \mathbb{Z}$ est un homomorphisme de groupes, dont le noyau est égal à $\mathrm{U}(\mathfrak{A})$.

Soit e un entier compris entre 1 et m, et soit $\underline{n} = (n_1, \dots, n_e)$ une famille d'entiers naturels non nuls dont la somme est égale à m, c'est-à-dire une partition de m. À cette partition correspond naturellement une sous-algèbre $\mathfrak{T}_{\underline{n}}$ de matrices triangulaires supérieures par blocs de $\mathrm{M}(m, k_D)$, et on désigne par $\mathfrak{A}_{\underline{n}}$ la sous-$\mathfrak{o}_F$-algèbre de $\mathrm{M}(m, \mathfrak{o}_D)$ constituée des matrices dont la réduction modulo $\mathrm{M}(m, \mathfrak{p}_D)$ appartient à $\mathfrak{T}_{\underline{n}}$. Les sous-$\mathfrak{o}_F$-algèbres $\mathfrak{A}_{\underline{n}}$ ainsi construites, lorsque $\underline{n}$ décrit l'ensemble des partitions de m, sont des ordres héréditaires de $\mathrm{M}(m, D)$, qualifiés de *standards*. Tout ordre héréditaire de $\mathrm{M}(m, D)$ est conjugué à un ordre standard, et deux ordres standards $\mathfrak{A}_{\underline{n}}$ et $\mathfrak{A}_{\underline{n}'}$ sont conjugués si et seulement si $\underline{n}'$ se déduit de $\underline{n}$ par permutation circulaire.

Pour tout ordre héréditaire $\mathfrak{A}$ de A, il existe un isomorphisme (2), unique à conjugaison près, envoyant $\mathfrak{A}$ sur un ordre standard $\mathfrak{A}_{\underline{n}}$ de $\mathrm{M}(m, D)$. La partition $\underline{n} = (n_1, \dots, n_e)$ est définie à permutation circulaire près, l'entier e est la période de $\mathfrak{A}$ et les entiers $n_i, 1 \leqslant i \leqslant e$, sont appelés ses *invariants*. Le quotient $\mathfrak{A}/\mathfrak{P}$ est une k_D-algèbre semi-simple isomorphe à $\mathrm{M}(n_1, k_D) \times \cdots \times \mathrm{M}(n_e, k_D)$, et le quotient $\mathrm{U}(\mathfrak{A})/\mathrm{U}^1(\mathfrak{A})$ s'identifie au groupe multiplicatif de l'algèbre $\mathfrak{A}/\mathfrak{P}$, c'est-à-dire à $\mathrm{GL}(n_1, k_D) \times \cdots \times \mathrm{GL}(n_e, k_D)$.

Plus généralement, désignons par $\mathscr{G}_{\mathfrak{A}}$ le quotient $\mathrm{U}(\mathfrak{A})/\mathrm{U}^1(\mathfrak{A})$. Alors l'application $\mathfrak{A}' \mapsto \mathscr{P}_{\mathfrak{A}'} = \mathrm{U}(\mathfrak{A}')/\mathrm{U}^1(\mathfrak{A})$ constitue une bijection croissante entre ordres héréditaires $\mathfrak{A}' \subset \mathfrak{A}$ et sous-groupes paraboliques de $\mathscr{G}_{\mathfrak{A}}$, et le radical unipotent de $\mathscr{P}_{\mathfrak{A}'}$ est $\mathrm{U}^1(\mathfrak{A}')/\mathrm{U}^1(\mathfrak{A})$. En particulier, si $\mathfrak{A}'$ est minimal, $\mathscr{P}_{\mathfrak{A}'}$ est un sous-groupe de Borel et son radical unipotent est un p-sous-groupe de Sylow de $\mathscr{G}_{\mathfrak{A}}$.

1.2 L'immeuble de Bruhat-Tits

Concernant ce qui suit, on pourra également se référer à [3] et [6]. Soit D une F-algèbre à division de degré réduit $d = d_{D/F}$, soit $m \geqslant 1$ un entier, et désignons par G le groupe $\mathrm{GL}(m, D)$ des matrices inversibles de taille m à coefficients dans D. Désignons par S le sous-groupe des matrices diagonales de G à coefficients dans F, notons Z son centralisateur (constitué des matrices diagonales à coefficients dans D) et N son normalisateur (constitué des matrices monômiales à coefficients dans D). Pour tout entier $1 \leqslant i \leqslant m$, on désigne par a_i l'application de Z dans $D^\times$ définie, pour $z = \mathrm{diag}(z_1, \dots, z_m) \in Z$, par

$$a_i(z) = z_i^{-1} \; . \tag{5}$$

Les restrictions à S des $a_i, 1 \leqslant i \leqslant m$, encore notées a_i, engendrent un groupe abélien libre de rang m, noté X^* et dont la loi sera notée *additivement*. Nous désignons alors par X le sous-groupe de

X^* engendré par les $a_{ij} = a_j - a_i$, pour $1 \leqslant i \neq j \leqslant m$. C'est un groupe abélien libre de rang $m-1$. Pour tout entier $1 \leqslant i \leqslant m$, on désigne par $a_i^\vee$ l'application de $D^\times$ dans Z définie par

$$a_i^\vee : u \mapsto \mathrm{diag}(1, \ldots, u^{-1}, \ldots, 1) \ ,$$

où le coefficient u^{-1} apparaît à la i-ième place. Les restrictions à $F^\times$ des $a_i^\vee, 1 \leqslant i \leqslant m$, encore notées $a_i^\vee$, engendrent un groupe abélien libre de rang m, noté X_* et dont la loi sera notée *additivement*. Nous désignons alors par $X^\vee$ le sous-groupe de X_* engendré par les $a_{ij}^\vee = a_j^\vee - a_i^\vee$, pour $1 \leqslant i \neq j \leqslant m$. C'est un groupe abélien libre de rang $m-1$. Il existe entre X_* et X^* un accouplement naturel, défini par $\mathbb{Z}$-linéarité à partir de

$$\langle a_i^\vee, a_j \rangle = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \ , \\ 0 & \text{sinon} \ , \end{cases} \tag{6}$$

mettant les deux groupes X et $X^\vee$ en dualité parfaite. Désignons enfin par Φ l'ensemble des a_{ij}, pour $1 \leqslant i \neq j \leqslant m$, qui est le système de racines attaché au tore déployé maximal S de G.

L'espace vectoriel $\mathscr{V}^\vee = X^\vee \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$ est de dimension $m-1$ et, considéré comme un espace affine sur lui-même, est appelé l'*appartement standard* et noté $\mathscr{A}$. En étendant par $\mathbb{R}$-linéarité la dualité définie en (6), chaque racine $a \in \Phi$ définit d'une part une fonction sur l'appartement, donnée pour tout $x \in \mathscr{A}$ par $a(x) = \langle x, a \rangle$, d'autre part une réflexion de $\mathscr{A}$ notée s_a, déterminée pour tout $x \in \mathscr{A}$ par

$$s_a(x) = x - a(x)a^\vee \ .$$

Chaque élément $z \in Z$ du normalisateur de S définit une translation de $\mathscr{A}$ (c'est-à-dire un vecteur de $\mathscr{V}^\vee$) notée $\nu(z)$ et déterminée, pour $a \in \Phi$, par

$$\langle \nu(z), a \rangle = -\upsilon_D(a(z)) \ . \tag{7}$$

Le normalisateur N de S est le produit semi-direct du groupe $\mathfrak{S}$ des matrices de permutation par le sous-groupe distingué Z. Si $w \in \mathfrak{S}$ correspond à la transposition entre i et j, on désigne par $\nu(w)$ la réflexion $s_{a_{ij}} = s_{a_{ji}}$. Conjointement à (7), ceci définit un homomorphisme ν de N dans le groupe des transformations affines de $\mathscr{A}$. Son noyau est constitué des matrices diagonales dont les coefficients diagonaux ont tous même valuation. Désignant par H le sous-groupe des matrices dont les coefficients diagonaux appartiennent à U_D, on a donc $\mathrm{Ker}\ \nu = \varpi_D^{\mathbb{Z}} H$. Son image, notée W, est le groupe de Weyl affine généralisé attaché au système de racines Φ.

Sans en rappeler la définition, désignons par $\mathscr{I}$ l'immeuble de Bruhat-Tits rattaché aux données précédentes. Mentionnons que $\mathscr{I}$ est muni d'une action de G, qu'il est la réunion des $g \cdot \mathscr{A}$ pour $g \in G$ et que le stabilisateur de $\mathscr{A}$ pour cette action est N, celui-ci agissant sur $\mathscr{A}$ *via* ν.

1.3 Sous-groupes radiciels

Désignons par $\Phi_{\mathrm{aff}} = \Phi \times \mathbb{Z}$ l'ensemble des racines affines. Si $\alpha = (a, k) \in \Phi_{\mathrm{aff}}$, nous voyons α comme une fonction sur l'appartement en posant $\alpha(x) = a(x) + k$ pour tout $x \in \mathscr{A}$. Si $a = a_{ij}$, le sous-groupe *radiciel* attaché à α est le sous-groupe de G, que nous noterons U_α, constitué des éléments u pour lesquels $u(e_j) - e_j$ appartient à $e_i \mathfrak{p}_D^k$ et $u(e_r) = e_r$ si $r \neq j$. Si Ω est une partie non vide de $\mathscr{A}$, on note $\alpha(\Omega) \geqslant 0$ pour signifier que α ne prend sur Ω que des valeurs positives ou nulles, et on pose

$$U_\Omega = \langle U_\alpha \mid \alpha(\Omega) \geqslant 0 \rangle \ , \quad P_\Omega = H U_\Omega \ , \quad N_\Omega = N \cap P_\Omega \ .$$

Ces trois sous-groupes de G sont compacts. Désignons par W_Ω le sous-groupe de W constitué des transformations fixant Ω point par point, et notons $\widehat{N}_\Omega = \nu^{-1}(W_\Omega)$ et $\widehat{P}_\Omega = \widehat{N}_\Omega U_\Omega$. Notons enfin

G^1 le sous-groupe de G engendré par les sous-groupes ouverts compacts de G et, si K est un sous-groupe quelconque de G, notons K^1 l'intersection de K avec G^1. Nous appellerons *fixateur* de Ω dans G l'ensemble des éléments de G vérifiant $g \cdot x = x$ pour tout point x de Ω. Par exemple, W_Ω est le fixateur de Ω dans W.

LEMME 1.1. *Soit Ω une partie non vide de $\mathscr{A}$. On a $\widehat{P}^1_\Omega = P_\Omega$.*

Démonstration. Selon [5], (7.1.3), l'image de N_Ω par ν est le sous-groupe de W engendré par les réflexions fixant Ω. En vertu de [2] Lie V, 3.3, prop. 2, ce sous-groupe est égal à W_Ω, c'est-à-dire que les images $\nu(N_\Omega)$ et $\nu(\widehat{N}_\Omega)$ coïncident. Puisque Ker $\nu = \varpi_D^{\mathbb{Z}} H$, on en déduit l'égalité entre $\varpi_D^{\mathbb{Z}} \widehat{N}_\Omega$ et $\varpi_D^{\mathbb{Z}} N_\Omega$. En prenant l'intersection de cette égalité avec G^1, et compte tenu de fait que N_Ω est compact, on en déduit que $\widehat{N}^1_\Omega = N_\Omega$. Puisque U_Ω est également compact, on a $\widehat{P}^1_\Omega = \widehat{N}^1_\Omega U_\Omega$, ce qui termine la démonstration. □

Désignons par $\Phi^+ = \{a_{ij} \mid 1 \leqslant i < j \leqslant m\}$ un ensemble de racines positives pour Φ et par $\Delta = \{a_{i,i+1} \mid 1 \leqslant i < m\}$ la base de Φ^+. Désignons par C la *chambre standard* de $\mathscr{A}$, constituée des points $x \in \mathscr{A}$ vérifiant

$$0 < a(x) < 1 \ , \quad \forall\ a \in \Phi^+ \ .$$

Une racine affine sera dite *positive* si elle l'est sur la chambre standard C, et nous noterons $\Phi^+_{\text{aff}} = \{\alpha \in \Phi_{\text{aff}} \mid \alpha(\mathrm{C}) \geqslant 0\}$ l'ensemble des racines affines positives. Plus généralement, à toute partie J de Δ correspond d'une part l'ensemble Φ_J des racines de Φ engendrées par J, d'autre part une *facette standard* F_J de $\mathscr{A}$, constituée des points $x \in \mathscr{A}$ vérifiant

$$0 < a(x) < 1 \ , \quad \forall\ a \in \Phi^+ \backslash \Phi^+_J \quad \text{et} \quad a(x) = 0 \ , \quad \forall\ a \in \Phi^+_J \ .$$

En particulier, si J est vide, il lui correspond la chambre standard $\mathrm{F}_\emptyset = \mathrm{C}$ et, si $J = \Delta$, il lui correspond le *sommet* standard. Une *chambre* de $\mathscr{A}$ est l'image par un élément de W de la chambre standard, et une *facette* de $\mathscr{A}$ est l'image par un élément de W d'une facette standard de $\mathscr{A}$. Si F est une facette de $\mathscr{A}$, nous désignerons par $\overline{\mathrm{F}}$ son *adhérence* au sens de [5], c'est-à-dire son adhérence relativement à la topologie induite sur le sous-espace affine de $\mathscr{A}$ qu'elle engendre. La dimension de ce sous-espace affine est la *dimension* de F.

REMARQUE 1.2. *Les chambres sont les facettes de dimension m, et les sommets celles de dimension nulle. Deux chambres (resp. deux sommets) sont conjuguées sous W. Par contre, deux facettes de même dimension $< m$ ne sont pas nécessairement conjuguées.*

LEMME 1.3. *Soit $J \subset \Delta$. Les racines affines positives sur la facette standard F_J sont exactement les éléments de $\Phi^-_J \cup \Phi^+_{\text{aff}}$.*

Démonstration. Il est clair que toute racine appartenant à $\Phi^-_J \cup \Phi^+_{\text{aff}}$ est positive sur F_J. Inversement, soit $\alpha = (a, k)$ une racine affine positive sur F_J.

Si $a > 0$, nous avons deux possibilités : ou bien $a \in \Phi^+_J$, auquel cas $\alpha(x) = k$ pour tout $x \in \mathrm{F}_J$, ce qui impose $k \geqslant 0$, ou bien $a \notin \Phi^+_J$, auquel cas $k < \alpha(x) < k+1$ pour tout $x \in \mathrm{F}_J$, ce qui impose également $k \geqslant 0$.

Si $a < 0$, nous avons encore deux possibilités : ou bien $a \in \Phi^-_J$, auquel cas $\alpha(x) = k$ pour tout $x \in \mathrm{F}_J$, ce qui impose $k \geqslant 0$, ou bien $a \notin \Phi^-_J$, auquel cas $k-1 < \alpha(x) < k$ pour tout $x \in \mathrm{F}_J$, ce qui impose $k \geqslant 1$.

Si l'on pose momentanément $J = \emptyset$, on constate que Φ^+_{aff} est constitué des racines affines de la forme (a, k) avec soit $a > 0$ et $k \geqslant 0$, soit $a < 0$ et $k \geqslant 1$. En définitive, les racines affines positives sur F_J sont de deux sortes : celles qui sont dans Φ^+_{aff}, et celles qui sont dans Φ^-_J. □

Désignons par A la F-algèbre $\mathrm{M}(m,D)$ des matrices de taille m à coefficients dans D. Selon [6], corollaire 2.15, il existe une bijection $\mathrm{F}\mapsto\mathfrak{A}_{\mathrm{F}}$ entre facettes de $\mathscr{I}$ et ordres héréditaires de A, caractérisée par le fait que $\mathrm{U}(\mathfrak{A}_{\mathrm{F}})$ est le fixateur de F dans G^1 et $\mathfrak{K}(\mathfrak{A}_{\mathrm{F}})$ son fixateur dans G. Si l'on désigne par $\mathfrak{A}_J$ l'ordre héréditaire $\mathfrak{A}_{\mathrm{F}_J}$, on obtient une application $J\mapsto\mathfrak{A}_J$ strictement croissante. En outre, si l'on désigne par W_J le sous-groupe de W engendré par les réflexions correspondant aux éléments de J, alors $W_J=W\cap\mathrm{U}(\mathfrak{A}_J)$ et l'application $w\mapsto\mathrm{U}(\mathfrak{A}_J)w\mathrm{U}(\mathfrak{A}_J)$ définit une bijection

$$W_J\backslash W/W_J\simeq\mathrm{U}(\mathfrak{A}_J)\backslash G/\mathrm{U}(\mathfrak{A}_J)\ . \tag{8}$$

Selon [12], paragraphe 3.9, dans toute double classe de $W_J\backslash W/W_J$ il existe un élément w tel que les éléments de $w(J)$ et de $w^{-1}(J)$ sont des racines positives, ce qui implique que

$$w(\Phi_J^+)\cap\Phi_J^-=\emptyset\quad\text{et}\quad w(\Phi_J^-)\cap\Phi_J^+=\emptyset\ . \tag{9}$$

Fixons une partie J de Δ, et désignons par C^J la chambre de $\mathscr{A}$ constituée des points $x\in\mathscr{A}$ vérifiant

$$0<a(x)<1\ ,\quad\forall\ a\in\Phi^+\backslash\Phi_J^+\quad\text{et}\quad -1<a(x)<0,\quad\forall\ a\in\Phi_J^+\ .$$

L'intersection de $\overline{\mathrm{C}}$ avec $\overline{\mathrm{C}}^J$ est égale à l'adhérence $\overline{\mathrm{F}}_J$ de la facette standard F_J. On désigne par v l'unique élément v de W pour lequel $\mathrm{C}^J=v(\mathrm{C})$, et on pose $\mathfrak{A}_\emptyset^J=v\mathfrak{A}_\emptyset v^{-1}$. Puisque v fixe la facette F_J, on a $v\in W_J$. Reprenant le même raisonnement qu'au lemme 1.3, on note que, si $\alpha\in\Phi_{\mathrm{aff}}$, on a

$$\alpha(\mathrm{C}^J)\geqslant 0\Longleftrightarrow\alpha\in\Phi_J^-\cup(\Phi_{\mathrm{aff}}^+\backslash\Phi_J^-)\ . \tag{10}$$

Proposition 1.4. *Soit* $w\in W$ *vérifiant* (9). *Le sous-groupe* $\mathrm{U}(\mathfrak{A}_J)\cap w\mathrm{U}(\mathfrak{A}_J)w^{-1}$ *est inclus dans le groupe engendré par* $\mathrm{U}(\mathfrak{A}_\emptyset)\cap w\mathrm{U}(\mathfrak{A}_\emptyset)w^{-1}$ *et* $\mathrm{U}(\mathfrak{A}_\emptyset^J)\cap w\mathrm{U}(\mathfrak{A}_\emptyset^J)w^{-1}$.

Démonstration. Au vu de ce qui précède, l'intersection $\mathfrak{K}(\mathfrak{A}_J)\cap w\mathfrak{K}(\mathfrak{A}_J)w^{-1}$ est le fixateur dans G de la partie $\Omega=\mathrm{F}_J\cup w(\mathrm{F}_J)$ de $\mathscr{A}$. Appliquant [5], (7.4.4), cette intersection est égale à $\widehat{P}_\Omega$. Le sous-groupe compact

$$\mathrm{U}(\mathfrak{A}_J)\cap w\mathrm{U}(\mathfrak{A}_J)w^{-1}\ ,$$

inclus à la fois dans $\mathfrak{K}(\mathfrak{A}_J)\cap w\mathfrak{K}(\mathfrak{A}_J)w^{-1}$ et dans G^1, est, compte tenu du lemme 1.1, inclus dans P_Ω. En outre, selon le lemme 1.3, la condition $\alpha(\Omega)\geqslant 0$ sur la racine affine α est équivalente à la condition $\alpha\in(\Phi_J^-\cup\Phi_{\mathrm{aff}}^+)\cap w(\Phi_J^-\cup\Phi_{\mathrm{aff}}^+)$, de sorte que nous obtenons l'inclusion

$$\mathrm{U}(\mathfrak{A}_J)\cap w\mathrm{U}(\mathfrak{A}_J)w^{-1}\subset H\Big\langle U_\alpha\ \Big|\ \alpha\in(\Phi_J^-\cup\Phi_{\mathrm{aff}}^+)\cap w(\Phi_J^-\cup\Phi_{\mathrm{aff}}^+)\Big\rangle\ .$$

Compte tenu de (10), il reste à vérifier que $(\Phi_J^-\cap\Phi_{\mathrm{aff}}^+)\cap w(\Phi_J^-\cap\Phi_{\mathrm{aff}}^+)$ est inclus dans

$$\Big(\Phi_{\mathrm{aff}}^+\cap w(\Phi_{\mathrm{aff}}^+)\Big)\cup\Big((\Phi_J^-\cup\Phi_{\mathrm{aff}}^+\backslash\Phi_J^-)\cap w(\Phi_J^-\cup\Phi_{\mathrm{aff}}^+\backslash\Phi_J^-)\Big)\ ,$$

ce qui est immédiat à l'aide de la propriété (9). □

1.4 Changement de base

Dans cette section, nous fixons une extension E de F incluse dans A. Désignons par B son commutant dans A et par $\mathscr{I}_E$ l'immeuble de $B^\times$. Nous dirons qu'un ordre héréditaire de A est *E-pur*, ou plus simplement *pur*, s'il est normalisé par $E^\times$. Si $x\in\mathscr{I}$, nous désignerons par F_x la facette de $\mathscr{I}$ contenant x et par $\mathrm{End}\ x$ l'ordre héréditaire attaché à F_x. D'après [3], il existe une (unique) application affine et $B^\times$-équivariante $\boldsymbol{j}=\boldsymbol{j}_{E/F}$ de $\mathscr{I}_E$ dans $\mathscr{I}$, possédant les propriétés suivantes :

(J_1) $\mathrm{End}\ \boldsymbol{j}(y)\cap B=\mathrm{End}\ y$, pour tout $y\in\mathscr{I}_E$;

(J_2) les ordres purs de A sont ceux de la forme $\mathrm{End}\ \boldsymbol{j}(y)$, $y\in\mathscr{I}_E$.

Lemme 1.5. *Soit* $x\in\mathscr{I}$, *et soit* $\mathscr{A}$ *un appartement contenant* x. *Soit* $\mathrm{F}=\mathrm{F}_x$.

i) *Il existe un voisinage de x dans $\mathscr{A}$ dont tout point a une facette dont l'adhérence contient* F.

ii) *Si* F' *est une facette de $\mathscr{A}$ telle que* $\mathrm{F} \subset \overline{\mathrm{F}}'$, *alors x est limite d'une suite de points de* F'.

Démonstration. Rappelons qu'un *mur* de $\mathscr{A}$ est un hyperplan de $\mathscr{A}$ constitué des points annulés par une racine affine. Pour le point i), il existe, suivant [2] Lie V, 1.2, proposition 1, un voisinage ouvert $\mathscr{U}$ de x ne rencontrant aucun des murs de $\mathscr{A}$ ne contenant pas x. Soit x' un point de ce voisinage, soit F' sa facette et soit $\mathscr{A}'$ le sous-espace affine de $\mathscr{A}$ engendré par F'. Si $x \notin \mathscr{A}'$, il existe un mur contenant $\mathscr{A}'$ et pas x, ce qui est absurde. Le point x appartient donc à $\mathscr{A}'$, dans lequel F' est un ouvert. Si $x \notin \overline{\mathrm{F}}'$, il existe un voisinage ouvert $\mathscr{U}_{x'}$ de x dans $\mathscr{A}$ ne rencontrant pas $\overline{\mathrm{F}}'$. L'intersection de $\mathscr{U}$ avec les $\mathscr{U}_{x'}$, $x' \in \mathscr{U}$, est un voisinage ouvert de $\mathscr{A}$ répondant à la question.

Pour le point ii), soit $\mathscr{A}'$ le sous-espace affine de $\mathscr{A}$ engendré par F'. Dans $\mathscr{A}'$, l'adhérence topologique de F' est $\overline{\mathrm{F}}'$. Puisque $x \in \mathrm{F} \subset \overline{\mathrm{F}}'$ et puisque $\overline{\mathrm{F}}'$ n'a pas de point isolé, le point x est un point d'accumulation de F'. □

LEMME 1.6. *Soit $\mathfrak{B}$ un ordre maximal de B. Il existe un unique ordre pur $\mathfrak{A}$ de A dont $\mathfrak{B}$ est la trace sur B, et il est normalisé par $\mathfrak{K}(\mathfrak{B})$.*

Démonstration. Soient $\mathfrak{A}, \mathfrak{A}'$ deux ordres purs dont la trace sur B est l'ordre $\mathfrak{B}$ et, suivant (J_2), soient y, y' deux points de $\mathscr{I}_E$ tels que $\mathfrak{A} = \mathrm{End}\ \boldsymbol{j}(y)$ et $\mathfrak{A}' = \mathrm{End}\ \boldsymbol{j}(y')$. Par hypothèse, et d'après (J_1), les ordres $\mathrm{End}\ y$ et $\mathrm{End}\ y'$ sont tous les deux égaux à $\mathfrak{B}$, de sorte que y et y' appartiennent à la facette correspondant à $\mathfrak{B}$. Celui-ci étant maximal, cette facette est un point, donc $y = y'$.

Si $x \in \mathfrak{K}(\mathfrak{B})$, l'ordre $x^{-1}\mathfrak{A}x$ est un ordre pur de A dont la trace sur B est égale à $\mathfrak{B}$. Par unicité, on en déduit que $x^{-1}\mathfrak{A}x = \mathfrak{A}$. □

Mentionnons qu'un ordre pur dont la trace sur B est un ordre maximal de B est un ordre *pur maximal* de A, c'est-à-dire que c'est un élément maximal parmi les ordres héréditaires purs de A. Cependant, si $\mathfrak{A}$ est un ordre pur maximal de A, sa trace sur B n'est pas nécessairement un ordre maximal de B.

LEMME 1.7. *Soient $\mathfrak{A}$ un ordre pur de A et $\mathfrak{B} = \mathfrak{A} \cap B$. Quel que soit l'ordre héréditaire $\mathfrak{B}'$ inclus dans $\mathfrak{B}$, il existe un ordre pur de A inclus dans $\mathfrak{A}$ dont $\mathfrak{B}'$ est la trace sur B.*

Démonstration. Soient y, y' deux points de $\mathscr{I}_E$ tels que $\mathfrak{B} = \mathrm{End}\ y$ et $\mathfrak{B}' = \mathrm{End}\ y'$, et soit $\mathscr{A}_E$ un appartement de $\mathscr{I}_E$ les contenant. La condition $\mathfrak{B}' \subset \mathfrak{B}$ se traduit par le fait que $\mathrm{F}_y \subset \overline{\mathrm{F}}_{y'}$. D'après le lemme 1.5 ii), il existe une suite $(y_i)_{i \geqslant 0}$ de points de $\mathrm{F}_{y'}$ de limite y. Par continuité, la suite des points $x_i = \boldsymbol{j}(y_i), i \geqslant 0$, a pour limite $x = \boldsymbol{j}(y)$. A partir d'un certain rang, selon le lemme 1.5 i) appliqué en choisissant un appartement $\mathscr{A}$ de $\mathscr{I}$ contenant $\boldsymbol{j}(\mathscr{A}_E)$, on a $\mathrm{F}_x \subset \overline{\mathrm{F}}_{x_i}$ et donc $\mathrm{End}\ x_i \subset \mathrm{End}\ x$. Puisque $\mathfrak{A} \cap B = \mathfrak{B}$, on peut choisir y de telle sorte que $\mathrm{End}\ x = \mathfrak{A}$, ce qui termine la démonstration. □

2. Construction des β-extensions

2.1 Préliminaires

2.1.1 *Caractères simples* Soit β un élément de A, désignons par E la F-algèbre $F[\beta]$ et par B le commutant de β dans A. Dans tout ce qui suit, on suppose que E est un corps. Dans ce cas, B est une E-algèbre simple de centre E (voir [18]), c'est-à-dire qu'il existe un entier $m_E \geqslant 1$ et une E-algèbre à division D_E tels que B est isomorphe à la E-algèbre $\mathrm{M}(m_E, D_E)$. Si nous désignons par d_E le degré réduit de D_E sur E, le produit $m_E d_E[E:F]$ est égal à md.

DÉFINITION 2.1. *Un ordre héréditaire $\mathfrak{A}$ de A est dit* β-pur *si* $E^{\times} \subset \mathfrak{K}(\mathfrak{A})$.

L'application $\mathfrak{A} \mapsto \mathfrak{A} \cap B$ définit une surjection de l'ensemble des ordres héréditaires β-purs de A vers l'ensemble des ordres héréditaires de B (voir [4]). Soit $\mathfrak{A}$ un ordre β-pur de A, désignons par $\mathfrak{B}$ l'ordre $\mathfrak{A} \cap B$ et par $-n$ la $\mathfrak{A}$-valuation de β. Conformément à [14], définition 2.3, le quadruplet $[\mathfrak{A}, n, 0, \beta]$ est une strate pure de A, et le couple $(\beta, \mathfrak{A})$ sera dit *simple* si cette strate est simple (voir [14], définition 2.3). Suivant [14], section 3.3, nous pouvons associer à un couple simple $(\beta, \mathfrak{A})$ deux sous-groupes ouverts compacts $J^1 = J^1(\beta, \mathfrak{A})$ et $H^1 = H^1(\beta, \mathfrak{A})$ de $\mathrm{U}^1(\mathfrak{A})$, possédant les propriétés suivantes (voir [14], proposition 3.43).

Proposition 2.2. *Les deux groupes J^1 et H^1 sont normalisés par $(\mathfrak{K}(\mathfrak{A}) \cap B^\times)J^1$, et le quotient J^1/H^1 est un $\mathbb{F}_p$-espace vectoriel de dimension finie.*

Puisque $\mathrm{U}(\mathfrak{B})$ normalise J^1 et H^1, les ensembles $J = \mathrm{U}(\mathfrak{B})J^1$ et $H = \mathrm{U}(\mathfrak{B})H^1$ sont des sous-groupes ouverts compacts de $\mathrm{U}(\mathfrak{A})$, et les quotients $J/J^1 \simeq H/H^1$ s'identifient à $\mathrm{U}(\mathfrak{B})/\mathrm{U}^1(\mathfrak{B})$. Plus généralement, l'application $\mathfrak{B}' \mapsto \mathrm{U}(\mathfrak{B}')J^1/J^1$ constitue une bijection entre les ordres héréditaires $\mathfrak{B}' \subset \mathfrak{B}$ et les sous-groupes paraboliques de J/J^1, et le radical unipotent de $\mathrm{U}(\mathfrak{B}')J^1/J^1$ est $\mathrm{U}^1(\mathfrak{B}')J^1/J^1$.

Au couple simple $(\beta, \mathfrak{A})$ correspond également un ensemble $\mathscr{C}(\beta, \mathfrak{A})$ de caractères du groupe H^1 appelés *caractères simples*. En voici les principales propriétés (voir [14], proposition 3.46 et théorèmes 3.50 et 3.52).

Proposition 2.3. *Soit $\theta \in \mathscr{C}(\beta, \mathfrak{A})$. Le groupe $(\mathfrak{K}(\mathfrak{A}) \cap B^\times)J$ normalise θ, et l'entrelacement $I_G(\theta)$ est égal à $JB^\times J$. En outre, la forme symplectique $(x, y) \mapsto \theta([x, y])$ définie sur J^1/H^1 est non dégénérée.*

Nous rappelons maintenant le principe du transfert, ou plutôt une version simplifiée qui nous suffira ici. Soit e un idempotent non nul de A appartenant à $\mathfrak{B}$. L'élément $\mathrm{e}\beta$ est un élément simple de la F-algèbre $\mathrm{e}A\mathrm{e} = \mathrm{End}_D(\mathrm{e}V)$ et, si $\mathfrak{A}'$ est un ordre $\mathrm{e}\beta$-pur de $\mathrm{e}A\mathrm{e}$, le couple $(\mathrm{e}\beta, \mathfrak{A}')$ est simple. Il existe alors une bijection canonique de $\mathscr{C}(\beta, \mathfrak{A})$ vers $\mathscr{C}(\mathrm{e}\beta, \mathfrak{A}')$, appelée *transfert* et notée $\tau_{\mathfrak{A}', \mathfrak{A}}$ (voir [14], théorème 3.53). Si $\theta \in \mathscr{C}(\beta, \mathfrak{A})$, nous appellerons *transfert* de θ à $\mathscr{C}(\mathrm{e}\beta, \mathfrak{A}')$ le caractère $\tau_{\mathfrak{A}', \mathfrak{A}}(\theta)$.

Remarque 2.4. *Notamment, si l'on se cantonne au cas où* $\mathrm{e} = 1$*, on voit que, lorsque le couple $(\beta, \mathfrak{A})$ est simple, il en est de même de $(\beta, \mathfrak{A}')$ quel que soit l'ordre β-pur $\mathfrak{A}'$ de la F-algèbre A.*

Par définition (voir [14], proposition 3.47), la restriction à $\mathrm{U}^1(\mathfrak{B}) = \mathrm{U}(\mathfrak{B}) \cap H^1$ d'un caractère simple θ est de la forme $\lambda \circ \mathrm{N}_{B/E}$, où λ est un caractère de U^1_E. Identifiant U^1_E au quotient de U_E par le sous-groupe μ'_E des racines de l'unité de E d'ordre premier à p, nous notons λ_* l'unique prolongement de λ à U_E trivial sur μ'_E, c'est-à-dire l'unique prolongement de λ à U_E dont l'ordre est une puissance de p. Puisque $\mathrm{U}(\mathfrak{B})$ normalise θ, nous pouvons prolonger le caractère simple θ au groupe H, en un caractère noté θ_*, en posant $\theta_*|_{\mathrm{U}(\mathfrak{B})} = \lambda_* \circ \mathrm{N}_{B/E}$. Notons que l'ordre de ce prolongement est une puissance de p.

2.1.2 *Caractères de $\mathscr{G}_{\mathfrak{B}}$* Dans ce paragraphe, nous fixons un couple simple $(\beta, \mathfrak{A})$, et nous identifions les E-algèbres B et $\mathrm{M}(m_E, D_E)$. Nous désignons par $\mathfrak{B}$ la trace de $\mathfrak{A}$ sur B, par e sa période et par $n_1, \dots, n_e$ ses invariants. Identifions $\mathscr{G}_{\mathfrak{B}} = \mathrm{U}(\mathfrak{B})/\mathrm{U}^1(\mathfrak{B})$ au groupe $\mathscr{G}_1 \times \cdots \times \mathscr{G}_e$, avec $\mathscr{G}_i = \mathrm{GL}(n_i, k_{D_E})$ pour tout $1 \leqslant i \leqslant e$ et, pour tout ordre héréditaire $\mathfrak{B}' \subset \mathfrak{B}$, identifions le sous-groupe parabolique $\mathscr{P}_{\mathfrak{B}'} = \mathrm{U}(\mathfrak{B}')/\mathrm{U}^1(\mathfrak{B})$ au sous-groupe $\mathscr{P}_1 \times \cdots \times \mathscr{P}_e$, où $\mathscr{P}_i$ est un sous-groupe parabolique de $\mathscr{G}_i$. Tout caractère δ de $\mathscr{P}_{\mathfrak{B}'}$ s'écrit sous la forme $\delta = \delta_1 \otimes \cdots \otimes \delta_e$, où δ_i est un caractère de $\mathscr{P}_i$, pour $1 \leqslant i \leqslant e$.

Rappelons (voir [16], (I.4.5)) qu'il existe une uniformisante ϖ_{D_E} de D_E dont l'action sur $\mathscr{G}_{\mathfrak{B}}$ par conjugaison s'identifie à l'action sur le produit $\mathscr{G}_1 \times \cdots \times \mathscr{G}_e$ d'un générateur du groupe de Galois $\mathrm{Gal}(k_{D_E}/k_E)$. En particulier, un caractère de $\mathscr{P}_{\mathfrak{B}'}$ entrelacé par $B^\times$ est invariant par cette action du groupe de Galois.

Rappelons également que le groupe linéaire $\mathrm{GL}(2,\mathbb{F}_2)$, isomorphe au groupe $\mathfrak{S}_3$ des permutations de trois éléments, possède un unique caractère non trivial ε, correspondant à la signature de $\mathfrak{S}_3$.

Rappelons enfin que, de manière générale, si $\boldsymbol{k}$ est un corps fini, et si $n \geqslant 3$ ou $|\boldsymbol{k}| > 2$, alors tout caractère de $\mathrm{GL}(n,\boldsymbol{k})$ se factorise par le déterminant.

LEMME 2.5. *Un caractère d'un sous-groupe de Borel de $\mathscr{G}_{\mathfrak{B}}$ entrelacé par $\mathscr{G}_{\mathfrak{B}}$ se prolonge à $\mathscr{G}_{\mathfrak{B}}$.*

Démonstration. Ceci correspond au cas où $\mathfrak{B}'$ est minimal, chacun des $\mathscr{P}_i$, $1 \leqslant i \leqslant m_E$ étant alors un sous-groupe de Borel de $\mathscr{G}_i$. Désignons par $\delta = \delta_1 \otimes \cdots \otimes \delta_{m_E}$ un tel caractère, et fixons un entier $1 \leqslant i \leqslant m_E$. Si $\mathscr{G}_i = \mathrm{GL}(2,\mathbb{F}_2)$, le caractère δ_i se prolonge à $\mathscr{G}_i$ en 1 ou en ε, selon qu'il est trivial ou non.

Si $\mathscr{G}_i \neq \mathrm{GL}(2,\mathbb{F}_2)$, le caractère δ_i est trivial sur le radical unipotent de $\mathscr{P}_i$, de sorte qu'on peut le voir comme un caractère du tore diagonal de $\mathscr{G}_i$, et la condition d'entrelacement impose que δ_i est normalisé par les matrices de permutation, de sorte qu'il se factorise par le déterminant de $\mathscr{G}_i$. Il s'étend donc à $\mathscr{G}_i$ tout entier. $\square$

LEMME 2.6. *Si $\mathscr{G}_{\mathfrak{B}} = \mathrm{GL}(2,\mathbb{F}_2)$, le caractère ε n'est pas entrelacé par $B^\times$.*

Démonstration. Dans ce cas exceptionnel, la E-algèbre B est isomorphe à $\mathrm{M}(2,E)$ et l'ordre $\mathfrak{B}$ est maximal, c'est-à-dire qu'il est isomorphe à $\mathrm{M}(2,\mathfrak{o}_E)$. Soit $g = \mathrm{diag}(\varpi_E, 1)$. L'intersection $\mathrm{U}(\mathfrak{B}) \cap \mathrm{U}(\mathfrak{B})^g$ est un sous-groupe d'Iwahori dont la réduction modulo $\mathrm{U}^1(\mathfrak{B})$ est un sous-groupe d'ordre 2 engendré par la classe de

$$x = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

Puisque le conjugué gxg^{-1} est trivial modulo $\mathrm{U}^1(\mathfrak{B})$, on a $\varepsilon(x) = -1$ tandis que $\varepsilon^g(x) = 1$, ce qui prouve que ε n'est pas entrelacé par g. $\square$

LEMME 2.7. *Un caractère d'un sous-groupe parabolique de $\mathscr{G}_{\mathfrak{B}}$ entrelacé par $B^\times$ se prolonge à $\mathscr{G}_{\mathfrak{B}}$ sous la forme $\chi \circ \mathrm{N}_{B/E}$, où χ est un caractère de $\mathrm{U}_E/\mathrm{U}_E^1$.*

Démonstration. Désignons par $\delta = \delta_1 \otimes \cdots \otimes \delta_e$ un tel caractère, et fixons un entier $1 \leqslant i \leqslant e$. Le caractère δ_i de $\mathscr{P}_i$ est lui-même entrelacé par $B^\times$. Si $\mathscr{G}_i = \mathrm{GL}(2,\mathbb{F}_2)$, on déduit du lemme 2.6 que δ_i est trivial, de sorte que le lemme 2.7 est vrai dans ce cas. Dans le cas contraire, δ_i est trivial sur le radical unipotent de $\mathscr{P}_i$, de sorte qu'on peut le voir comme un caractère du sous-groupe de Levi $\mathscr{M}_i$ de $\mathscr{P}_i$. Ecrivons celui-ci sous la forme $\mathscr{M}_i = \mathscr{M}_i^1 \times \cdots \times \mathscr{M}_i^{r_i}$, où $\mathscr{M}_i^j = \mathrm{GL}(n_i^j, k_{D_E})$ pour $1 \leqslant j \leqslant r_i$, et δ_i sous la forme $\delta_i = \delta_i^1 \otimes \cdots \otimes \delta_i^{r_i}$. Nous allons prouver que δ_i est de la forme $\chi_i \circ \mathrm{N}_{B/E}$, où χ_i est un caractère du groupe multiplicatif de k_E.

Dans le cas où l'un des $\mathscr{M}_i^j$ est isomorphe à $\mathrm{GL}(2,\mathbb{F}_2)$, en s'aidant du lemme 2.6, on voit que chacun des δ_i^j, $1 \leqslant j \leqslant r_i$, est trivial, de sorte que δ_i est lui-même trivial.

Dans le cas où aucun des facteurs $\mathscr{M}_i^j$ n'est isomorphe à $\mathrm{GL}(2,\mathbb{F}_2)$, chacun des δ_i^j se factorise sous la forme $\lambda_i^j \circ \det_{\mathscr{G}_i^j}$, où λ_i^j est un caractère du groupe multiplicatif de k_{D_E}. Celui-ci étant invariant par l'action de $\mathrm{Gal}(k_{D_E}/k_E)$, il se factorise par la norme de l'extension k_{D_E}/k_E et on en déduit que $\delta_i^j = \chi_i^j \circ \mathrm{N}_{B/E}$, où χ_i^j est un caractère du groupe multiplicatif de k_E. Puisque les matrices de permutation de $\mathscr{G}_i$ entrelacent δ_i, les χ_i^j, pour $1 \leqslant j \leqslant r_i$, sont égaux à un même caractère noté χ_i, ce qui prouve que $\delta_i = \chi_i \circ \mathrm{N}_{B/E}$.

Terminons la démonstration. Puisque les matrices de permutation de $B^\times$ entrelacent δ, les χ_i, pour $1 \leqslant i \leqslant e$, sont égaux à un même caractère noté χ, ce qui prouve que $\delta = \chi \circ \mathrm{N}_{B/E}$. $\square$

2.1.3 *Induction et entrelacement* Soient K un sous-groupe ouvert compact de G et H un sous-groupe ouvert de K. En particulier, le groupe H est d'indice fini dans K et fermé dans G. Si ρ est une représentation lisse de H, on note $\mathrm{Ind}_H^K\ \rho$ son induite à K. C'est une représentation lisse du groupe K et, si ρ est de dimension finie, son induite l'est également, et $\dim \mathrm{Ind}_H^K\ \rho = (K : H) \dim \rho$. Si π est une représentation lisse de K, on a ("Réciprocité de Frobenius") :

$$\mathrm{Hom}_K(\pi, \mathrm{Ind}_H^K\ \rho) \simeq \mathrm{Hom}_H(\pi|_H, \rho) \quad \text{et} \quad \mathrm{Hom}_K(\mathrm{Ind}_H^K\ \rho, \pi) \simeq \mathrm{Hom}_H(\rho, \pi|_H)\ . \tag{11}$$

Pour tous $x \in G$ et $h \in H$, on note $h^x = x^{-1}hx$, ainsi que ρ^x la représentation de $H^x = x^{-1}Hx$ définie par $\rho^x(h^x) = \rho(h)$, pour tout $h \in H$. Soit H' un sous-groupe ouvert de K. Alors la restriction à H' de l'induite de ρ à K est égale à ("Formule de Mackey") :

$$\left(\mathrm{Ind}_H^K\ \rho\right)|_{H'} = \bigoplus_{x \in H\backslash K/H'} \mathrm{Ind}_{H'\cap H^x}^{H'}\ (\rho^x|_{H'\cap H^x})\ . \tag{12}$$

On suppose maintenant que ρ est une représentation lisse irréductible de H. Notons que ρ est alors de dimension finie, et que $g \in I_G(\rho)$ est équivalent à $g^{-1} \in I_G(\rho)$, de sorte que l'ensemble $I_G(\rho)$ est stable par inversion. Il existe certains faits simples liant l'entrelacement (dans G) de ρ et celui de son induite : si $g \in G$ entrelace ρ, il entrelace $\mathrm{Ind}_H^K\ \rho$. Inversement, si $g \in G$ entrelace l'induite $\mathrm{Ind}_H^K\ \rho$, il existe des éléments $k, k' \in K$ tels que kgk' entrelace ρ. On pourra se référer à [9], (4.1.5).

Lemme 2.8. *Soit ρ une représentation lisse irréductible de H. Si l'entrelacement $I_K(\rho)$ est inclus dans H, l'induite $\mathrm{Ind}_H^K\ \rho$ est irréductible.*

Soit $(\beta, \mathfrak{A})$ un couple simple de A. Si $\mathfrak{A}'$ est un ordre β-pur inclus dans $\mathfrak{A}$, on note respectivement J' le groupe $J(\beta, \mathfrak{A}')$ associé au couple simple $(\beta, \mathfrak{A}')$ et $\mathfrak{B}'$ l'ordre héréditaire $\mathfrak{A}' \cap B$. Puisque $\mathfrak{A}'$ est inclus dans $\mathfrak{A}$, les groupes J' et $\mathrm{U}(\mathfrak{B}')J^1$ sont tous deux des sous-groupes de $\mathrm{U}(\mathfrak{B}')\mathrm{U}^1(\mathfrak{A}')$.

Proposition 2.9. *Soient ρ une représentation de $\mathrm{U}(\mathfrak{B}')J^1$ et ρ' une représentation de J', induisant à $\mathrm{U}(\mathfrak{B}')\mathrm{U}^1(\mathfrak{A}')$ des représentations équivalentes. Supposons que $I_G(\rho) \subset JB^\times J$ et que $I_G(\rho') \subset J'B^\times J'$. Alors le groupe $B^\times$ entrelace ρ si et seulement s'il entrelace ρ'.*

Démonstration. Nous faisons la démonstration dans un sens, l'autre étant similaire. Soit $g \in B^\times$. Puisque g entrelace ρ', il entrelace l'induite de ρ' à $\mathrm{U}(\mathfrak{B}')\mathrm{U}^1(\mathfrak{A}')$, qui est équivalente à celle de ρ à $\mathrm{U}(\mathfrak{B}')\mathrm{U}^1(\mathfrak{A}')$. Il existe donc $k_1, k_2 \in \mathrm{U}(\mathfrak{B}')\mathrm{U}^1(\mathfrak{A}')$ tels que k_1gk_2 entrelace ρ. Puisque $I_G(\rho)$ est inclus dans $JB^\times J$, il existe en outre $h_1, h_2 \in \mathrm{U}(\mathfrak{B}')J^1$ tels que $h_1k_1gk_2h_2$ appartienne à $B^\times$. Puisque, selon [14], corollaire 3.3, on a

$$\mathrm{U}^1(\mathfrak{A}')g\mathrm{U}^1(\mathfrak{A}') \cap B^\times = \mathrm{U}^1(\mathfrak{B}')g\mathrm{U}^1(\mathfrak{B}')\ ,$$

il existe $s_1, s_2 \in \mathrm{U}(\mathfrak{B}')$ tels que $h_1k_1gk_2h_2 = s_1gs_2$ entrelace ρ. Puisque s_1 et s_2 normalisent ρ, on en déduit que g entrelace ρ. $\square$

2.2 Représentations de Heisenberg et leurs prolongements à J

Dans cette section, on fixe un couple simple $(\beta, \mathfrak{A})$ de A et un caractère simple $\theta \in \mathscr{C}(\beta, \mathfrak{A})$. Comte tenu des propositions 2.2 et 2.3, on peut associer à θ, par un procédé classique (voir par exemple [17], ou [9], (5.1.1)), sa représentation de Heisenberg η. Il s'agit de l'unique, à équivalence près, représentation irréductible de J^1 dont la restriction à H^1 est un multiple de θ. Sa dimension est $\sqrt{(J^1 : H^1)}$, et elle est caractérisée par l'égalité

$$\mathrm{Ind}_{H^1}^{J^1}\theta = \sqrt{(J^1 : H^1)} \cdot \eta\ .$$

PROPOSITION 2.10. *La représentation η est normalisée par $(\mathfrak{K}(\mathfrak{A}) \cap B^{\times})J$, et son entrelacement dans G est $JB^{\times}J$. Plus précisément, pour $g \in JB^{\times}J$, la dimension de $I_g(\eta)$ vaut 1.*

Démonstration. Soit $y \in (\mathfrak{K}(\mathfrak{A}) \cap B^{\times})J$. D'après la proposition 2.3, l'élément y normalise θ, de sorte que la restriction de η^y à H^1 est multiple de θ. Par unicité de la représentation de Heisenberg, η^y est équivalente à η, ce qui prouve la première assertion. Puisque $\eta|_{H^1}$ est un multiple de θ, l'entrelacement de η est, d'après le proposition 2.3, inclus dans $JB^{\times}J$. Inversement, si $y \in JB^{\times}J$, il entrelace θ donc son induite à J^1, qui est un multiple de η. Ceci prouve la seconde assertion. La preuve de la dernière assertion est similaire à celle de [9], (5.1.8). Il suffit, pour la reproduire, de remplacer le lemme *ibid.* (5.1.10) par [14], lemme 3.20. $\square$

LEMME 2.11. *Soit $i \in \{1, 2\}$. Soit $\mathfrak{A}_i$ un ordre β-pur de A et posons $\mathfrak{B}_i = \mathfrak{A}_i \cap B$. Soit η_i la représentation de Heisenberg d'un caractère simple de $\mathscr{C}(\beta, \mathfrak{A}_i)$. Alors*

$$\frac{\dim \eta_1}{\dim \eta_2} = \frac{(J^1(\beta, \mathfrak{A}_1) : J^1(\beta, \mathfrak{A}_2))}{(\mathrm{U}^1(\mathfrak{B}_1) : \mathrm{U}^1(\mathfrak{B}_2))} \ .$$

Démonstration. C'est une conséquence immédiate de [14], lemme 3.21. Mentionnons que ce lemme généralise [9], (5.1.2), à qui nous empruntons la notation d'indice généralisé d'un groupe dans un autre. $\square$

Soit $\mathfrak{A}'$ un ordre β-pur de A inclus dans $\mathfrak{A}$, et posons $\mathfrak{B}' = \mathfrak{A}' \cap B$. On note respectivement J', J'^1 et H'^1 les groupes $J(\beta, \mathfrak{A}')$, $J^1(\beta, \mathfrak{A}')$ et $H^1(\beta, \mathfrak{A}')$, et on note θ' le transfert de θ à $\mathscr{C}(\beta, \mathfrak{A}')$, ainsi que η' la représentation de Heisenberg de θ' sur J'^1. Puisque $\mathfrak{A}'$ est inclus dans $\mathfrak{A}$, les groupes J'^1 et $\mathrm{U}^1(\mathfrak{B}')J^1$ sont tous deux des sous-groupes de $\mathrm{U}^1(\mathfrak{A}')$.

PROPOSITION 2.12. *Il existe, à équivalence près, une unique représentation irréductible $\bar{\eta}$ du groupe $\mathrm{U}^1(\mathfrak{B}')J^1$, prolongeant η, et induisant à $\mathrm{U}^1(\mathfrak{A}')$ la même représentation irréductible que η'. Son entrelacement est égal à $JB^{\times}J$ et, pour $g \in JB^{\times}J$, la dimension de $I_g(\bar{\eta})$ vaut 1.*

Démonstration. La démonstration de la première assertion est identique à celle de [9], (5.1.15), à condition de remplacer [9], (5.1.2) par le lemme 2.11. Prouvons la seconde assertion. D'après la proposition 2.10, et compte tenu du fait que, à $g \in G$ fixé, l'espace d'entrelacement $I_g(\bar{\eta})$ est un sous-espace de $I_g(\eta)$, il suffit de prouver que $\bar{\eta}$ est entrelacée par $B^{\times}$ tout entier. Puisque $\bar{\eta}$ prolonge η, son entrelacement est inclus dans $J^1B^{\times}J^1$. Ensuite, pour tout $y \in B^{\times}$, l'intersection $\mathrm{U}^1(\mathfrak{A}')y\mathrm{U}^1(\mathfrak{A}') \cap B^{\times}$ est d'après [14], corollaire 3.3, égale à $\mathrm{U}^1(\mathfrak{B}')y\mathrm{U}^1(\mathfrak{B}')$, et le groupe $\mathrm{U}^1(\mathfrak{B}')$ normalise $\bar{\eta}$. On peut ainsi appliquer la proposition 2.9, de sorte que la représentation $\bar{\eta}$ est entrelacée par le groupe $B^{\times}$. $\square$

THÉORÈME 2.13. *Soit $\theta \in \mathscr{C}(\beta, \mathfrak{A})$ et soit η sa représentation de Heisenberg sur J^1. Il existe un prolongement κ de η à J, et l'ensemble $\mathrm{Pr}(\theta)$ des prolongements de η à J est égal à*

$$\mathrm{Pr}(\theta) = \{\kappa \otimes \chi \mid \chi \text{ caractère de } J/J^1\} \ .$$

Démonstration. Choisissons un ordre minimal $\mathfrak{B}_{\mathrm{m}}$ de B inclus dans $\mathfrak{B}$ et, d'après le lemme 1.7, notons $\mathfrak{A}_{\mathrm{m}}$ un ordre β-pur inclus dans $\mathfrak{A}$ dont la trace sur B est $\mathfrak{B}_{\mathrm{m}}$. À partir de là, la première partie de la démonstration de [9], (5.2.4) peut être reprise intégralement. Puisque J normalise η, cette représentation se prolonge en une représentation *projective* π de J. Plus précisément, désignons par V_η l'espace de η. Alors π est une application de J dans $\mathrm{GL}(V_\eta)$ prolongeant η, induisant un morphisme de groupes de J vers le groupe linéaire projectif $\mathrm{PGL}(V_\eta)$, et telle que $\pi(x)^{-1}\eta(g)\pi(x) = \eta(x^{-1}gx)$ pour tous $x \in J$ et $g \in J^1$. Cette représentation projective π définit un 2-cocycle ω de J/J^1 dans $\mathbb{C}^{\times}$ par l'égalité

$$\pi(x)\pi(y) = \omega(x, y)\pi(xy) \ , \quad \forall\, x, y \in J \ , \tag{13}$$

et tordre π par une application scalaire $\lambda : J \to \mathbb{C}^\times$ transforme ω en un cocycle cohomologue. Si l'on note n la dimension de η, et si l'on prend le déterminant de la relation (13), on voit que ω^n est un cobord et, quitte à tordre π, on peut supposer ω^n, donc ω, à valeurs dans les racines de l'unité d'ordre une puissance de p. En d'autres termes, l'ordre de ω dans $\mathrm{H}^2(J/J^1, \mathbb{C}^\times)$ est une puissance de p. Or selon la proposition 2.12, la représentation η s'étend au sous-groupe $\mathrm{U}^1(\mathfrak{B}_\mathrm{m})J^1$, de sorte que l'application de restriction

$$\mathrm{H}^2(J/J^1, \mathbb{C}^\times)_p \longrightarrow \mathrm{H}^2(\mathrm{U}^1(\mathfrak{B}_\mathrm{m})J^1/J^1, \mathbb{C}^\times)\ , \tag{14}$$

où $\mathrm{H}^2(J/J^1, \mathbb{C}^\times)_p$ désigne la composante p-primaire de $\mathrm{H}^2(J/J^1, \mathbb{C}^\times)$, envoie ω sur 0. Puisque $\mathfrak{B}_\mathrm{m}$ est minimal, le sous-groupe $\mathrm{U}^1(\mathfrak{B}_\mathrm{m})J^1/J^1$ est un p-sous-groupe de Sylow de J/J^1, de sorte que, d'après [15], (IX.2), théorème 4, l'application (14) est injective. Il existe donc une représentation κ de J prolongeant la représentation η. $\square$

Proposition 2.14. *Supposons que le quotient J/J^1 ne possède aucun facteur isomorphe à $\mathrm{GL}(2, \mathbb{F}_2)$, et notons $n = \dim \eta$. Alors il existe un unique $\kappa \in \mathrm{Pr}(\theta)$ tel que $\det \kappa|_H = \theta_*^n$.*

Démonstration. Identifions le quotient J/J^1 au groupe fini $\mathscr{G} = \mathscr{G}_1 \times \cdots \times \mathscr{G}_e$, avec $\mathscr{G}_i = \mathrm{GL}(n_i, k_{D_E})$ pour $1 \leqslant i \leqslant e$. Puisqu'aucun des facteurs $\mathscr{G}_i$ n'est isomorphe à $\mathrm{GL}(2, \mathbb{F}_2)$, le sous-groupe dérivé de $\mathscr{G}$ est $\mathrm{SL}(n_1, k_{D_E}) \times \cdots \times \mathrm{SL}(n_e, k_{D_E})$, de sorte que tout caractère de J/J^1 est d'ordre premier à p. Soit $\lambda \in \mathrm{Pr}(\theta)$. Puisque la restriction de λ à H^1 est multiple de θ, il existe un caractère α de $H/H^1 \simeq \mathscr{G}$ tel que $\det \lambda|_H = \alpha\theta_*^n$. Tout caractère de J/J^1 étant d'ordre premier à p, et puisque n est une puissance de p, il existe un unique caractère χ de H/H^1 tel que $\alpha\chi^n = 1$. La représentation $\kappa = \lambda \otimes \chi$ répond à la question. Compte tenu de ce qui précède, l'unicité est immédiate. $\square$

2.3 Induction parabolique

Dans cette section, on fixe un couple simple $(\beta, \mathfrak{A})$ de A et un caractère simple $\theta \in \mathscr{C}(\beta, \mathfrak{A})$. Ce qui suit est une généralisation au cas non déployé du processus décrit aux sections 7.1 et 7.2 de [9].

Désignons par e la période de $\mathfrak{B}$ et par $\underline{n} = (n_1, \dots, n_e)$ la partition de m_E constituée de ses invariants. Pour $1 \leqslant j \leqslant e$, notons E_j l'idempotent de $\mathrm{M}(m_E, D_E)$ égal à $\mathrm{diag}(0, \dots, \mathrm{I}_{n_j}, \dots, 0)$, où la matrice unité I_{n_j} apparaît à la j-ième place. Désignons par $\mathrm{e} = (\mathrm{e}_j)_{1 \leqslant j \leqslant e}$ une famille de e idempotents de A appartenant à $\mathfrak{B}$. Nous dirons que la famille e est *subordonnée* à l'ordre $\mathfrak{B}$ s'il existe un isomorphisme Ψ de E-algèbres entre B et $\mathrm{M}(m_E, D_E)$ tel que :

i) l'image de $\mathfrak{B}$ par Ψ est l'ordre standard attaché à $\underline{n}$;

ii) pour $1 \leqslant j \leqslant e$, l'image de e_j par Ψ est E_j.

Dans toute la suite, on suppose que la famille e est subordonnée à $\mathfrak{B}$ et que B est identifiée à $\mathrm{M}(m_E, D_E)$ *via* Ψ. La famille e est, au sens de [14], paragraphe 2.3.1, une *décomposition* de A *conforme* à $\mathfrak{A}$ sur E. Pour tout $1 \leqslant j \leqslant e$, nous notons $A_j = \mathrm{e}_j A \mathrm{e}_j$ et G_j son groupe multiplicatif, ainsi que $\mathfrak{A}_j = \mathfrak{A} \cap A_j$ et $B_j = B \cap A_j$ qui est le commutant de E dans A_j. Chacun des couples $(\beta, \mathfrak{A}_j)$ est simple et l'ordre $\mathfrak{B}_j = \mathfrak{A}_j \cap B$ est maximal dans B_j. Nous posons

$$M = \prod_{1 \leqslant j \leqslant e} G_j\ , \quad U = 1 + \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant e} \mathrm{e}_i A \mathrm{e}_j\ , \quad U^- = 1 + \prod_{1 \leqslant j < i \leqslant e} \mathrm{e}_i A \mathrm{e}_j\ , \tag{15}$$

et le sous-groupe M ainsi défini sera appelé le *sous-groupe de Levi associé* à la décomposition e. Nous dirons qu'un sous-groupe $\mathcal{G}$ de G admet une *décomposition d'Iwahori* relativement à la décomposition e si

$$\mathcal{G} = \mathcal{G} \cap U^- \cdot \mathcal{G} \cap M \cdot \mathcal{G} \cap U \quad \text{et} \quad \mathcal{G} \cap M = \prod_{1 \leqslant j \leqslant e} \mathcal{G} \cap G_j\ ,$$

où la première égalité signifie que tout élément $g \in \mathcal{G}$ s'écrit sous la forme $g = u^- m u$, avec $u^- \in U^-, m \in M, u \in U$ (et ce de façon unique).

Posons $\bar{A} = \mathrm{End}_F(V)$. Selon la terminologie employée dans [8], (10.10), la famille e définit une décomposition de $\bar{A}$ conforme à la strate simple $[\bar{\mathfrak{A}}, n, 0, \beta]$. Ainsi, pour tout $1 \leqslant j \leqslant e$, nous notons $\bar{A}_j = \mathrm{e}_j \bar{A} \mathrm{e}_j$ et $\bar{G}_j$ son groupe multiplicatif, ainsi que $\bar{\mathfrak{A}}_j = \bar{\mathfrak{A}} \cap \bar{A}_j$. Nous notons $\bar{M}, \bar{U}$ et $\bar{U}^-$ les sous-groupes de $\bar{G}$ définis de façon analogue à (15), et nous notons $\bar{J}^1$ et $\bar{H}^1$ les sous-groupes $J^1(\beta, \bar{\mathfrak{A}})$ et $H^1(\beta, \bar{\mathfrak{A}})$. Rappelons ([14]) que $\bar{H}^1 \cap G = H^1$ et que $H^1(\mathrm{e}_j\beta, \bar{\mathfrak{A}}_j) \cap G = H^1(\mathrm{e}\beta, \mathfrak{A}_j)$ pour tout $1 \leqslant j \leqslant e$, et qu'il existe un résultat similaire pour J^1. Suivant [16], (I.4.5) nous fixons un couple (L, ϖ_D) constitué d'une extension L de F incluse dans D, non ramifiée de degré d, et d'une uniformisante ϖ_D de D normalisant L et vérifiant $\varpi_D^d = \varpi_F$. Désignons par $\boldsymbol{\mu}$ le groupe cyclique des racines de l'unité de L d'ordre premier à p, par Π l'automorphisme intérieur de $\bar{G}$ défini par ϖ_D et par Δ le sous-groupe de $\mathrm{Aut}\,\bar{G}$ engendré par $\boldsymbol{\mu}$ et Π. Puisque L/F est non ramifiée, on a $L = F[\boldsymbol{\mu}]$ et, puisque la restriction de Π à L est un générateur de $\mathrm{Gal}(L/F)$, on a $\bar{G}^\Delta = G$.

Lemme 2.15. *Soient K_1, K_2 deux sous-groupes Δ-stables de $\bar{G}$ tels que $K_1 \cap K_2 = \{1\}$. Alors $(K_1 \cdot K_2)^\Delta = K_1^\Delta \cdot K_2^\Delta$.*

Démonstration. Soit δ un élément de Δ, et soit $x_1 x_2 \in (K_1 \cdot K_2)^\Delta$, avec $x_i \in K_i$, $1 \leqslant i \leqslant 2$. Puisque K_1 et K_2 sont Δ-stables, l'élément $x_1^{-1}\delta(x_1) = x_2\delta(x_2)^{-1}$ appartient à $K_1 \cap K_2$, de sorte que chacun des $x_i, 1 \leqslant i \leqslant 2$, est stable par δ. □

Proposition 2.16. *Nous avons les résultats suivants.*

i) *Les groupes H^1 et J^1 admettent une décomposition d'Iwahori relative* à e.
ii) *Pour tout $1 \leqslant j \leqslant e$, nous avons $H^1 \cap G_j = H^1(\mathrm{e}_j\beta, \mathfrak{A}_j)$, et $J^1 \cap G_j = J^1(\mathrm{e}_j\beta, \mathfrak{A}_j)$.*
iii) *Tout caractère simple $\theta \in \mathscr{C}(\beta, \mathfrak{A})$ est trivial sur $H^1 \cap U$ et sur $H^1 \cap U^-$, et la restriction de θ à $H^1 \cap G_j$ est égale au transfert de θ à $\mathscr{C}(\mathrm{e}_j\beta, \mathfrak{A}_j)$.*

Démonstration. Les points 1 et 2 seront démontrés pour H^1, le cas de J^1 étant similaire. Considérant e comme une décomposition de $\bar{A}$ conforme à $\bar{\mathfrak{A}}$ sur E, nous obtenons, selon [9], (7.1.14) et [9], (7.1.16), les égalités

$$\bar{H}^1 = \bar{H}^1 \cap \bar{U}^- \cdot \bar{H}^1 \cap \bar{M} \cdot \bar{H}^1 \cap \bar{U} \ , \tag{16}$$

$$\bar{H}^1 \cap \bar{M} = H^1(\mathrm{e}_1\beta, \bar{\mathfrak{A}}_1) \times \cdots \times H^1(\mathrm{e}_e\beta, \bar{\mathfrak{A}}_e) \ . \tag{17}$$

Appliquant le lemme 2.15, on voit donc que l'intersection avec G de (16) et (17) fournit les points 1 et 2. Il reste à prouver le dernier point. Pour cela, on procède comme dans [9], (7.1.19). □

Nous désignons maintenant, pour tout $1 \leqslant j \leqslant e$, par θ_j le transfert de θ à $\mathscr{C}(\mathrm{e}_j\beta, \mathfrak{A}_j)$, et nous notons η_j la représentation de Heisenberg de θ_j sur $J^1(\mathrm{e}_j\beta, \mathfrak{A}_j)$. Désignons alors par η_M la représentation irréductible

$$\eta_M = \eta_1 \otimes \cdots \otimes \eta_e$$

du groupe $J^1 \cap M$. Posons $P = MU$. C'est un sous-groupe parabolique de G, et notons J_P^1 le groupe $(J^1 \cap P)H^1$. Puisqu'il contient H^1, c'est un sous-groupe distingué de J^1, et il possède une décomposition d'Iwahori $J_P^1 = (H^1 \cap U^-) \cdot (J^1 \cap M) \cdot (J^1 \cap U)$.

Proposition 2.17. *Il existe une unique représentation irréductible η_P de J_P^1 prolongeant η_M et triviale sur les groupes $H^1 \cap U^-$ et $J^1 \cap U$. L'induite de η_P à J^1 est égale à η.*

Démonstration. L'argument est identique à celui de [9], (7.2.4), compte tenu de la proposition 2.16 et du fait que les quotients $J^1 \cap U^-/H^1 \cap U^-$ et $J^1 \cap U/H^1 \cap U$ sont tous deux des sous-espaces totalement isotropes de J^1/H^1 orthogonaux à $J^1 \cap M/H^1 \cap M$, relativement à la forme symplectique $(x, y) \mapsto \theta([x, y])$. □

Compte tenu du théorème 2.13, nous choisissons maintenant, pour tout $1 \leqslant j \leqslant e$, un prolongement κ_j de η_j au groupe $J(\mathrm{e}_j\beta, \mathfrak{A}_j)$. Désignons alors par κ_M la représentation irréductible

$$\kappa_M = \kappa_1 \otimes \cdots \otimes \kappa_e$$

du groupe $J \cap M$, et par J_P le groupe $(J \cap P)H^1$. Prenant la trace sur G de la décomposition [9], (7.1.17) (ii) appliquée au couple simple $(\beta, \tilde{\mathfrak{A}})$, on voit qu'il admet la décomposition d'Iwahori $J_P^1 = (H^1 \cap U^-) \cdot (J \cap M) \cdot (J^1 \cap U)$, et nous prolongeons κ_M en une représentation κ_P de J_P en posant

$$\kappa_P(hmj) = \kappa_M(m) \ , \quad \forall\ h \in H^1 \cap U^- \ , m \in J \cap M \ , j \in J^1 \cap U \ . \tag{18}$$

Affirmer que κ_P, ainsi définie, est bien une représentation nécessite une justification. Soient x, x' deux éléments de J_P que nous écrivons $x = hmj$ et $x' = h'm'j'$, avec $h, h' \in H^1 \cap U^-$, $m, m' \in J \cap M$ et $j, j' \in J^1 \cap U$, et calculons $\kappa_P(xx')$. Remarquons que le produit jh' appartient non seulement à J_P mais à J_P^1, de sorte qu'on peut écrire $jh' = h_0m_0j_0$, avec $h_0 \in H^1 \cap U^-$, $m_0 \in J^1 \cap M$ et $j_0 \in J^1 \cap U$. On obtient de cette façon l'égalité $xx' = (hmh_0m^{-1})(mm_0m')(m'^{-1}j_0m'j')$, qui est la décomposition d'Iwahori de xx'. De ceci on déduit que $\kappa_P(xx') = \kappa_M(mm_0m') = \kappa_M(m)\kappa_M(m_0)\kappa_M(m')$. Puisque $m_0 \in J^1 \cap M$, il vient l'égalité $\kappa_M(m_0) = \eta_M(m_0) = \eta_P(jh') = 1$, ce qui prouve que $\kappa_P(xx') = \kappa_P(x)\kappa_P(x')$.

Théorème 2.18. *La représentation $\kappa = \mathrm{Ind}_{J_P}^{J}\ \kappa_P$ est un prolongement de η.*

Démonstration. D'après (12), $\kappa|_{J^1}$ se décompose en une somme de représentations indexée par les doubles classes $J_P \backslash J / J^1$. Puisque $J_P J^1 = J$, cette somme ne porte en fait que sur une seule double classe. Autrement dit, $\kappa|J^1$ est égal à l'induite à J^1 de $\kappa_P|_{J_P} = \eta_P$, c'est-à-dire que, d'après la proposition 2.17, on a $\kappa|_{J^1} = \eta$. De ce fait, κ est irréductible et prolonge η. □

2.4 Entrelacement

Dans cette section, nous fixons un couple simple $(\beta, \mathfrak{A})$ de A et un caractère simple $\theta \in \mathscr{C}(\beta, \mathfrak{A})$. D'après la proposition 2.10, l'entrelacement d'un élément quelconque de $\mathrm{Pr}(\theta)$, c'est-à-dire d'un prolongement de $\eta = \eta(\theta)$ au groupe J, est inclus dans $JB^\times J$. Nous appelons *β-extension* un élément de $\mathrm{Pr}(\theta)$ dont l'entrelacement est exactement $JB^\times J$. Puisque J normalise tout élément de $\mathrm{Pr}(\theta)$, un prolongement de η à J est une β-extension si et seulement s'il est entrelacé par $B^\times$. Nous prouvons ici que le sous-ensemble $\mathrm{Be}(\theta)$ de $\mathrm{Pr}(\theta)$ constitué des β-extensions n'est pas vide.

2.4.1 *Le cas minimal* Le théorème suivant conclut le travail amorcé à la section précédente.

Théorème 2.19. *Supposons que $\mathfrak{B}$ est principal de période e et soit $\theta \in \mathscr{C}(\beta, \mathfrak{A})$. Soit* e *une décomposition de A subordonnée à $\mathfrak{B}$, et soit θ_1 le transfert de θ à $\mathscr{C}(\mathrm{e}_1\beta, \mathfrak{A}_1)$. Si θ_1 admet une β-extension, c'est également le cas de θ.*

Démonstration. Pour chaque entier $1 \leqslant j \leqslant e$, identifions la F-algèbre A_j à A_1 et le couple simple $(\mathrm{e}_j\beta, \mathfrak{A}_j)$ à $(\mathrm{e}_1\beta, \mathfrak{A}_1)$. Supposons qu'il existe une β-extension κ_1 de η_1 sur $J(\mathrm{e}_1\beta, \mathfrak{A}_1)$. Définissons κ_P par (18) à partir de $\kappa_M = \kappa_1 \otimes \cdots \otimes \kappa_1$, et κ par le théorème 2.18. Nous allons prouver que κ est une β-extension de η. Identifions B à $\mathrm{M}(m_E, D_E)$ *via* un E-isomorphisme Ψ, et soit $y \in B^\times$. Quitte à remplacer y par un élément de $\mathrm{U}(\mathfrak{B})y\mathrm{U}(\mathfrak{B})$, puisque $\mathrm{U}(\mathfrak{B})$ normalise κ et compte tenu de la bijection (8), on peut supposer que y est de la forme

$$y = wz \ ,$$

où w est une matrice de permutation et z une matrice diagonale dont les coefficients diagonaux appartiennent à $\varpi_{D_E}^{\mathbb{Z}}$. De cette façon, l'élément y normalise le sous-groupe de Levi M et, si l'on note $z_j = \mathrm{e}_j(z)$ pour $1 \leqslant j \leqslant e$, on a $y^{-1}(J \cap M)y = J_1^{z_1} \times \cdots \times J_1^{z_e}$. Pour chaque entier $1 \leqslant j \leqslant e$, l'élément z_j entrelace κ_1, ce qui prouve que y entrelace la représentation κ_M de $J \cap M$. Il s'agit maintenant de prouver que y entrelace κ_P, ce qui terminera la démonstration.

En raisonnant comme dans [8], (10.4), on voit que le groupe J_P admet une décomposition d'Iwahori relativement à toute décomposition dont le sous-groupe de Levi associé est M, et en particulier, puisque y normalise M, relativement à la décomposition $(ye^j y^{-1} \mid 1 \leqslant j \leqslant e)$, c'est-à-dire que l'on a

$$J_P = (J_P \cap {}^yU^-) \cdot (J_P \cap M) \cdot (J_P \cap {}^yU) \ .$$

En d'autres termes, si $g \in J_P \cap J_P^y$, il se décompose sous la forme $g = hmj$, avec $h \in J_P \cap U^-$, $m \in J_P \cap M$ et $j \in J_P \cap U$, tandis que ${}^yg$ se décompose sous la forme ${}^yg = h'm'j'$, avec $h' \in J_P \cap {}^yU^-$, $m' \in J_P \cap M$ et $j' \in J_P \cap {}^yU$. Ecrivant l'égalité

$${}^yh{}^ym{}^yj = h'm'j' \ , \quad {}^yh, h' \in {}^yU^-, \ {}^ym, m' \in M \ , \quad \text{et} \quad {}^yj, j' \in {}^yU \ ,$$

l'unicité de la décomposition dans $U^- \cdot M \cdot U$ impose d'avoir les égalités ${}^yh = h'$, ${}^ym = m'$ et ${}^yj = j'$. Choisissons maintenant un opérateur d'entrelacement non nul Φ de κ_M avec κ_M^y, et écrivons

$$\Phi \circ \kappa_P(g) = \Phi \circ \kappa_M(m) = \kappa_M(m') \circ \Phi \ . \tag{19}$$

Pour prouver que la quantité (19) est égale à $\kappa_P^y(g) \circ \Phi$, il reste à montrer que $\kappa_P(h')$ et $\kappa_P(j')$ sont triviales. Nous en faisons la preuve pour h', celle pour j' étant similaire. Puisque h' appartient à J_P, nous pouvons décomposer cet élément sous la forme $h' = u^- nu$, avec $u^- \in J_P \cap U^-$, $n \in J_P \cap M$ et $u \in J_P \cap U$.

LEMME 2.20. *L'élément h' s'écrit $h' = ab$, avec $a \in U^-$ et $b \in U$.*

Démonstration. Par opérations élémentaires sur les lignes et les colonnes de h'. □

Invoquant encore une fois l'unicité de la décomposition de h' dans $U^- \cdot M \cdot U$, nous en déduisons que $u^- = a$, $u = b$ et $n = 1$. En définitive, on obtient $\kappa_P(h') = \kappa_P(u^-)\kappa_P(u)$, quantité triviale puisque $u^- \in J_P \cap U^-$ et $u \in J_P \cap U$. Ceci termine la démonstration. □

Voici une première application du théorème 2.19.

LEMME 2.21. *Supposons que B est un corps, et soit $\theta \in \mathscr{C}(\beta, \mathfrak{A})$. Alors* $\mathrm{Be}(\theta) \neq \emptyset$.

Démonstration. Puisque B est une E-algèbre à division, son seul ordre maximal est son anneau d'entiers, dont le normalisateur est égal à $B^\times$. Pour prouver l'existence d'une β-extension, il suffit donc de trouver un prolongement de η normalisé par une uniformisante ϖ de B. Puisque $J/J^1 \simeq \mathrm{U}_B/\mathrm{U}_B^1$, nous pouvons appliquer la proposition 2.14. Il existe donc un unique élément $\kappa \in \mathrm{Pr}(\theta)$ dont le déterminant sur H est égal à θ_*^n, où n désigne la dimension de η. Selon la proposition 2.3, l'uniformisante ϖ normalise θ_* sur H et, selon la proposition 2.10, elle normalise η. Ainsi la représentation κ^ϖ prolonge η à J et son déterminant sur H est égal à θ_*^n de sorte que, par unicité, la représentation κ^ϖ est équivalente à κ. □

THÉORÈME 2.22. *Supposons $\mathfrak{B}$ minimal, et soit $\theta \in \mathscr{C}(\beta, \mathfrak{A})$. Alors* $\mathrm{Be}(\theta) \neq \emptyset$.

Démonstration. Choisissons une décomposition e subordonnée à l'ordre minimal $\mathfrak{B}_{\mathrm{m}}$. De cette façon, pour tout $1 \leqslant j \leqslant m_E$, la E-algèbre B_j est un corps. Pour conclure, il suffit d'appliquer le lemme 2.21 conjointement au théorème 2.19. □

2.4.2 *Le cas général* Soit $(\beta,\mathfrak{A})$ un couple simple de A et soit $\theta \in \mathscr{C}(\beta,\mathfrak{A})$. Soit $\mathfrak{A}'$ un ordre héréditaire de A inclus dans $\mathfrak{A}$ et soit $\mathfrak{B}' = \mathfrak{A} \cap B$. Puisque $\mathfrak{A}'$ est inclus dans $\mathfrak{A}$, les groupes J' et $\mathrm{U}(\mathfrak{B}')J^1$ sont tous deux des sous-groupes de $\mathrm{U}(\mathfrak{B}')\mathrm{U}^1(\mathfrak{A}')$. Nous définissons une correspondance entre $\mathrm{Pr}(\theta)$ et $\mathrm{Pr}(\theta')$ de la façon suivante. Deux représentations $\kappa \in \mathrm{Pr}(\theta)$ et $\kappa' \in \mathrm{Pr}(\theta')$ seront dites *mutuellement cohérentes* si

$$\mathrm{Ind}_{J'}^{\mathrm{U}(\mathfrak{B}')\mathrm{U}^1(\mathfrak{A}')}\ \kappa' \simeq \mathrm{Ind}_{\mathrm{U}(\mathfrak{B}')J^1}^{\mathrm{U}(\mathfrak{B}')\mathrm{U}^1(\mathfrak{A}')}\ \kappa|_{\mathrm{U}(\mathfrak{B}')J^1}\ . \tag{20}$$

Lemme 2.23. *Soit $\kappa \in \mathrm{Pr}(\theta)$. Il existe une unique représentation $\kappa' \in \mathrm{Pr}(\theta')$ telle que κ et κ' soient mutuellement cohérentes.*

Démonstration. La démonstration est identique à celle de [9], (5.2.5). □

Lemme 2.24. *Soient $\kappa \in \mathrm{Pr}(\theta)$ et $\kappa' \in \mathrm{Pr}(\theta')$ deux représentations mutuellement cohérentes. Alors $\kappa' \in \mathrm{Be}(\theta')$ si et seulement si $B^\times$ entrelace $\kappa|_{\mathrm{U}(\mathfrak{B}')J^1}$.*

Démonstration. Il s'agit d'une conséquence immédiate de la proposition 2.9, appliquée à $\rho = \kappa|_{\mathrm{U}(\mathfrak{B}')J^1}$ et $\rho' = \kappa'$. □

Soit $(\beta,\mathfrak{A})$ un couple simple de A et soit $\theta \in \mathscr{C}(\beta,\mathfrak{A})$. Soit $\mathfrak{B}'$ un ordre héréditaire de B inclus dans $\mathfrak{B}$ et, selon le lemme 1.7, soit $\mathfrak{A}'$ un ordre β-pur de A inclus dans $\mathfrak{A}$ dont $\mathfrak{B}'$ est la trace sur B. Puisque $\mathfrak{A}'$ est inclus dans $\mathfrak{A}$, les groupes J' et $\mathrm{U}(\mathfrak{B}')J^1$ sont tous deux des sous-groupes de $\mathrm{U}(\mathfrak{B}')\mathrm{U}^1(\mathfrak{A}')$.

Proposition 2.25. *Soit $\kappa \in \mathrm{Pr}(\theta)$. Si $B^\times$ entrelace $\kappa|_{\mathrm{U}(\mathfrak{B}')J^1}$, alors $\kappa \in \mathrm{Be}(\theta)$.*

Démonstration. Il suffit d'en faire la preuve lorsque $\mathfrak{B}'$ est minimal, ce que nous supposons ici. Pour fixer les idées, nous notons $\mathfrak{B}' = \mathfrak{B}_{\mathrm{m}}$. Nous reprenons ici les notations introduites au paragraphe 1.3. Notamment, nous notons Δ l'ensemble des racines simples standard du groupe $\mathrm{GL}(m_E, D_E)$. Choisissons un E-isomorphisme Ψ de B vers $\mathrm{M}(m_E, D_E)$ envoyant $\mathfrak{B}$ sur un ordre standard $\mathfrak{B}_J$, $J \subset \Delta$, et $\mathfrak{B}_{\mathrm{m}}$ sur l'ordre standard minimal $\mathfrak{B}_\emptyset$. On désigne par $\mathfrak{B}'_{\mathrm{m}}$ l'ordre minimal de B dont l'image par Ψ est l'ordre $\mathfrak{B}_\emptyset^J$ introduit à la section 1.3.

Dans un premier temps, nous prouvons que $B^\times$ entrelace également $\kappa|_{\mathrm{U}(\mathfrak{B}'_{\mathrm{m}})J^1}$. Désignons par κ_{m} la représentation de J_{m} se déduisant de κ, compte tenu du lemme 2.23, par cohérence mutuelle. D'après le lemme 2.24, c'est une β-extension. Soit x un élément de $\mathrm{U}(\mathfrak{B})$ tel que $\mathfrak{B}'_{\mathrm{m}} = \mathfrak{B}_{\mathrm{m}}^x$. L'ordre $\mathfrak{A}'_{\mathrm{m}} = \mathfrak{A}_{\mathrm{m}}^x$ est donc β-pur, inclus dans $\mathfrak{A}$, et sa trace sur B est l'ordre minimal $\mathfrak{B}'_{\mathrm{m}}$. Conjugant la relation de cohérence liant κ et κ_{m} par x, et tenant compte du fait que x normalise κ, on obtient

$$\mathrm{Ind}_{J'_{\mathrm{m}}}^{\mathrm{U}(\mathfrak{B}'_{\mathrm{m}})\mathrm{U}^1(\mathfrak{A}'_{\mathrm{m}})}\ \kappa_{\mathrm{m}}^x \simeq \mathrm{Ind}_{\mathrm{U}(\mathfrak{B}'_{\mathrm{m}})J^1}^{\mathrm{U}(\mathfrak{B}'_{\mathrm{m}})\mathrm{U}^1(\mathfrak{A}'_{\mathrm{m}})}\ \kappa|_{\mathrm{U}(\mathfrak{B}'_{\mathrm{m}})J^1}\ . \tag{21}$$

Selon le lemme 2.24, il reste à prouver que $\kappa'_{\mathrm{m}} = \kappa_{\mathrm{m}}^x$ est entrelacée par $B^\times$ sur J'_{m}. Soient donc $y \in B^\times$ et $g' \in J'_{\mathrm{m}} \cap J'^y_{\mathrm{m}}$. Puisque $J'_{\mathrm{m}} = x^{-1}J_{\mathrm{m}}x$, on peut écrire $g' = x^{-1}gx$, avec $g \in J_{\mathrm{m}} \cap J_{\mathrm{m}}^y$. Ecrivons donc

$$\kappa'^y_{\mathrm{m}}(g') = \kappa_{\mathrm{m}}^x(yg'y^{-1}) = \kappa_{\mathrm{m}}(zgz^{-1})\ ,$$

avec $z = xyx^{-1}$. Puisque $z \in B^\times$, on peut choisir un opérateur d'entrelacement non nul Φ de $I_z(\kappa_{\mathrm{m}})$, de sorte que $\kappa_{\mathrm{m}}^z(g) \circ \Phi = \Phi \circ \kappa_{\mathrm{m}}(g)$. Puisque $\kappa_{\mathrm{m}}(g)$ est égal à $\kappa'_m(g')$, il reste finalement

$$\kappa'^y_{\mathrm{m}}(g') \circ \Phi = \Phi \circ \kappa'_{\mathrm{m}}(g')\ , \quad \forall\ g' \in J'_{\mathrm{m}} \cap J'^y_{\mathrm{m}}\ ,$$

c'est-à-dire que κ'_{m} est entrelacée par $B^\times$. En résumé, si l'on pose $K = \mathrm{U}(\mathfrak{B}_{\mathrm{m}})J^1$ et $K' = \mathrm{U}(\mathfrak{B}'_{\mathrm{m}})J^1$, chacune des représentations $\kappa|_K$ et $\kappa|_{K'}$ est entrelacée par $B^\times$.

Fixons un élément y de $B^\times$. Quitte à remplacer y par un élément de $\mathrm{U}(\mathfrak{B})y\mathrm{U}(\mathfrak{B})$, on peut supposer, puisque $\mathrm{U}(\mathfrak{B})$ normalise tout prolongement de η à J, que y appartient au groupe de Weyl affine généralisé de $B^\times$ et vérifie la propriété (9). Il existe donc d'une part un opérateur d'entrelacement non nul Φ tel que l'on ait $\Phi\circ\kappa(x)=\kappa^y(x)\circ\Phi$ pour tout $x\in K\cap K^y$, d'autre part un opérateur d'entrelacement non nul Φ' tel que l'on ait $\Phi'\circ\kappa(x)=\kappa^y(x)\circ\Phi'$ pour tout $x\in K'\cap K'^y$. En particulier, si l'on se restreint à $x\in J^1\cap J^{1y}$, on voit que Φ et Φ' appartiennent tous deux à $I_y(\eta)$, qui est de dimension 1 d'après la proposition 2.10. En d'autres termes, on peut supposer que $\Phi'=\Phi$ et écrire

$$\Phi\circ\kappa(x)=\kappa^y(x)\circ\Phi\ , \quad \forall\ x\in(K\cap K^y)\cup(K'\cap K'^y)\ . \tag{22}$$

Pour montrer que Φ entrelace κ avec κ^y sur $J\cap J^y$, nous avons besoin de renseignements sur l'intersection $J\cap J^y$.

LEMME 2.26. *Le groupe $J\cap J^y$ est inclus dans $\langle K\cap K^y, K'\cap K'^y\rangle$.*

Démonstration. Partons de l'égalité $J\cap J^y=\big(\mathrm{U}(\mathfrak{B})\cap\mathrm{U}(\mathfrak{B})^y\big)\big(J^1\cap J^{1y}\big)$. Si x appartient à $J\cap J^y$, nous pouvons l'écrire sous la forme $x=ua$, avec $u\in\mathrm{U}(\mathfrak{B})\cap\mathrm{U}(\mathfrak{B})^y$ et $a\in J^1\cap J^{1y}$. Au vu des identifications faites au début de cette démonstration, des hypothèses faites sur y, et d'après la proposition 1.4, le groupe $\mathrm{U}(\mathfrak{B})\cap\mathrm{U}(\mathfrak{B})^y$ est inclus dans le groupe engendré par

$$\mathrm{U}(\mathfrak{B}'_{\mathrm{m}})\cap\mathrm{U}(\mathfrak{B}'_{\mathrm{m}})^y \quad \text{et} \quad \mathrm{U}(\mathfrak{B}_{\mathrm{m}})\cap\mathrm{U}(\mathfrak{B}_{\mathrm{m}})^y \tag{23}$$

De ce fait, on écrit u sous la forme d'un produit $u=b_1\cdots b_r$, chacun des b_i appartenant à l'un des deux groupes de (23), de sorte que x s'écrit finalement sous la forme d'un produit d'éléments appartenant ou bien à $K\cap K^y$, ou bien à $K'\cap K'^y$. □

Ceci termine la démonstration de la proposition 2.25. □

LEMME 2.27. *On suppose que $\mathrm{Be}(\theta')\neq\emptyset$. Étant donné $\kappa'\in\mathrm{Be}(\theta')$, il existe une unique représentation $\hat\eta$ de $\mathrm{U}(\mathfrak{B}')J^1$ prolongeant η, entrelacée par $B^\times$ et telle que*

$$\mathrm{Ind}_{J'}^{\mathrm{U}(\mathfrak{B}')\mathrm{U}^1(\mathfrak{A}')}\ \kappa'\simeq\mathrm{Ind}_{\mathrm{U}(\mathfrak{B}')J^1}^{\mathrm{U}(\mathfrak{B}')\mathrm{U}^1(\mathfrak{A}')}\ \hat\eta\ . \tag{24}$$

Démonstration. Notons $\bar\eta$ la représentation construite à la proposition 2.12, et désignons par r' le membre de gauche de l'égalité ci-dessus. Puisque l'entrelacement de κ' dans $\mathrm{U}(\mathfrak{B}')\mathrm{U}^1(\mathfrak{A}')$ est $J'B^\times J'\cap\mathrm{U}(\mathfrak{B}')\mathrm{U}^1(\mathfrak{A}')$, il est est égal à J', de sorte que r' est, d'après le lemme 2.8, une représentation irréductible de $\mathrm{U}(\mathfrak{B}')\mathrm{U}^1(\mathfrak{A}')$. Sa restriction à $\mathrm{U}^1(\mathfrak{A}')$ comporte, sachant que la restriction de κ' à J'^1 est égale à η', et compte tenu de la proposition 2.12, la composante

$$\mathrm{Ind}_{J'^1}^{\mathrm{U}^1(\mathfrak{A}')}\ \eta'\simeq\mathrm{Ind}_{\mathrm{U}^1(\mathfrak{B}')J^1}^{\mathrm{U}^1(\mathfrak{A}')}\ \bar\eta\ ,$$

de sorte que $r'|_{\mathrm{U}^1(\mathfrak{B}')J^1}$ contient $\bar\eta$. Choisissons une composante irréductible $\hat\eta$ de $r'|_{\mathrm{U}(\mathfrak{B}')J^1}$ dont la restriction à $\mathrm{U}^1(\mathfrak{B}')J^1$ contient $\bar\eta$. Sachant que l'entrelacement de $\bar\eta$ dans $\mathrm{U}(\mathfrak{B}')\mathrm{U}^1(\mathfrak{A}')$ est inclus dans $\mathrm{U}(\mathfrak{B}')J^1$, l'induite r de $\hat\eta$ à $\mathrm{U}(\mathfrak{B}')\mathrm{U}^1(\mathfrak{A}')$ est irréductible. En outre, $\langle r,r'\rangle=\langle r|_{J'},\kappa'\rangle$ est non nul par définition, de sorte que $r=r'$. Il reste à voir que $\hat\eta$ prolonge $\bar\eta$, et pour cela, à prouver que ces deux représentations ont même dimension. De l'égalité entre r et r', et du fait que κ' prolonge η', nous déduisons que

$$(\mathrm{U}(\mathfrak{B}')\mathrm{U}^1(\mathfrak{A}'):J')\dim\eta'=(\mathrm{U}(\mathfrak{B}')\mathrm{U}^1(\mathfrak{A}'):\mathrm{U}(\mathfrak{B}')J^1)\dim\hat\eta\ .$$

Appliquant le lemme 2.11, nous pouvons déduire que $\dim\hat\eta=\dim\eta=\dim\bar\eta$, c'est-à-dire que la restriction de $\hat\eta$ à $\mathrm{U}^1(\mathfrak{B}')J^1$ est égale à η'. Pour prouver l'unicité de $\hat\eta$, il suffit de montrer que r' contient η avec multiplicité 1. Appliquant (12), on voit que

$$\langle r'|_{J^1},\eta\rangle=\sum_{x\in\mathrm{U}(\mathfrak{B}')\mathrm{U}^1(\mathfrak{A}')}\langle\hat\eta^x,\eta\rangle \tag{25}$$

et un $x \in \mathrm{U}(\mathfrak{B}')\mathrm{U}^1(\mathfrak{A}')$ entrelaçant $\hat{\eta}$ avec η entrelace *a fortiori* η, de sorte que $x \in \mathrm{U}(\mathfrak{B}')J^1$. La quantité (25) est donc égale à $\langle \hat{\eta}, \eta \rangle_{J^1}$, ce qui vaut 1. Enfin, appliquant la proposition 2.9 à $\rho = \hat{\eta}$ et à $\rho' = \kappa'$, on en déduit que $\hat{\eta}$ est entrelacé par $B^\times$. □

Nous sommes maintenant prêts à prouver l'existence de β-extensions pour tout couple simple.

Théorème 2.28. *Soit $(\beta, \mathfrak{A})$ un couple simple de A, et soit $\theta \in \mathscr{C}(\beta, \mathfrak{A})$. Il existe une β-extension κ de η, et*

$$\mathrm{Be}(\theta) = \left\{ \kappa \otimes (\chi \circ \mathrm{N}_{B/E}) \;\middle|\; \chi \in \widehat{\mathrm{U}_E/\mathrm{U}_E^1} \right\}.$$

Démonstration. Soit $\mathfrak{A}_\mathrm{m}$ un ordre β-pur inclus dans $\mathfrak{A}$ tel que l'ordre $\mathfrak{B}_\mathrm{m} = \mathfrak{A}_\mathrm{m} \cap B$ soit minimal. Soit θ_m le transfert de θ à $\mathscr{C}(\beta, \mathfrak{A}_\mathrm{m})$ et, d'après le théorème 2.22, soit κ_m une β-extension de η_m. D'après le lemme 2.27, on dispose donc d'un prolongement $\hat{\eta}$ de η à $\mathrm{U}(\mathfrak{B}_\mathrm{m})J^1$ entrelacé par $B^\times$. Soit maintenant $\lambda \in \mathrm{Pr}(\theta)$ et soit δ un caractère de $\mathrm{U}(\mathfrak{B}_\mathrm{m})J^1$ trivial sur J^1 tel que $\lambda|_{\mathrm{U}(\mathfrak{B}_\mathrm{m})J^1} = \hat{\eta} \otimes \delta$. Puisque $\mathrm{U}(\mathfrak{B})$ normalise λ et entrelace $\hat{\eta}$, le caractère δ vu comme un caractère de $\mathrm{U}(\mathfrak{B}_\mathrm{m})/\mathrm{U}^1(\mathfrak{B})$ est entrelacé par le groupe $\mathrm{U}(\mathfrak{B})/\mathrm{U}^1(\mathfrak{B})$, donc il se prolonge à $\mathrm{U}(\mathfrak{B})$ d'après le lemme 2.5. Ainsi, la représentation $\kappa = \lambda \otimes \delta^{-1}$ prolonge η à J, et sa restriction à $\mathrm{U}(\mathfrak{B}_\mathrm{m})J^1$ est entrelacée par $B^\times$, de sorte que, selon la proposition 2.25, c'est une β-extension.

Mettons que κ' est une autre β-extension de η. Nous pouvons l'écrire sous la forme $\kappa' = \kappa \otimes \xi$, où l'on peut voir ξ comme un caractère de $\mathrm{U}(\mathfrak{B})$ trivial sur $\mathrm{U}^1(\mathfrak{B})$ et entrelacé par $B^\times$. Le lemme 2.7 permet de conclure la démonstration du théorème 2.28. □

Proposition 2.29. *Soit $\kappa' \in \mathrm{Be}(\theta')$. Il existe une unique représentation $\kappa \in \mathrm{Be}(\theta)$ telle que κ et κ' soient mutuellement cohérentes.*

Démonstration. On applique le lemme 2.27, de sorte qu'on dispose d'une représentation $\hat{\eta}$ de $\mathrm{U}(\mathfrak{B}')J^1$ prolongeant η et entrelacée par $B^\times$, et vérifiant (24). Soit $\lambda \in \mathrm{Be}(\theta)$ et soit δ un caractère de $\mathrm{U}(\mathfrak{B}')J^1$ tel que $\lambda|_{\mathrm{U}(\mathfrak{B}')J^1} = \hat{\eta} \otimes \delta$. Le caractère δ est entrelacé par $B^\times$ de sorte que, d'après le lemme 2.7, il se prolonge à $\mathrm{U}(\mathfrak{B})$. De ce fait, la représentation $\kappa = \lambda \otimes \delta^{-1}$ est une β-extension cohérente avec κ'. Si λ' est une autre β-extension telle que λ et κ' soient mutuellement cohérentes, alors λ prolonge $\hat{\eta}$, de sorte qu'il existe un caractère χ de J trivial sur $\mathrm{U}(\mathfrak{B}')J^1$ tel que $\lambda' = \kappa \otimes \chi$. Ce caractère χ s'identifie à un caractère de $\mathscr{G}_\mathfrak{B}$ trivial sur un sous-groupe parabolique. Il est donc trivial sur tous ses conjugués, et ceux-ci engendrant le groupe $\mathscr{G}_\mathfrak{B}$ tout entier, on a $\chi = 1$. □

Références

1 J. N. Bernstein. Le "centre" de Bernstein. In *Representations of reductive groups over a local field*, Travaux en Cours, pages 1–32. Hermann, Paris, 1984. Edited by P. Deligne.

2 N. Bourbaki. *Éléments de mathématique. Fasc. XXXIV. Groupes et algèbres de Lie. Chapitre IV : Groupes de Coxeter et systèmes de Tits. Chapitre V : Groupes engendrés par des réflexions. Chapitre VI : systèmes de racines.* Actualités Scientifiques et Industrielles, No. 1337. Hermann, Paris, 1968.

3 P. Broussous and B. Lemaire. Building of $\mathrm{GL}(m, D)$ and centralizers. *Transform. Groups*, 7(1) :15–50, 2002.

4 Paul Broussous. Hereditary orders and embeddings of local fields in simple algebras. *J. Algebra*, 204(1) :324–336, 1998.

5 F. Bruhat and J. Tits. Groupes réductifs sur un corps local. *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.*, (41) :5–251, 1972.

6 F. Bruhat and J. Tits. Schémas en groupes et immeubles des groupes classiques sur un corps local. *Bull. Soc. Math. France*, 112(2) :259–301, 1984.

7 C. J. Bushnell and A. Fröhlich. Nonabelian congruence Gauss sums and p-adic simple algebras. *Proc. London Math. Soc. (3)*, 50(2) :207–264, 1985.

8 Colin J. Bushnell and Guy Henniart. Local tame lifting for $\mathrm{GL}(N)$. I. Simple characters. *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.*, (83) :105–233, 1996.

9 Colin J. Bushnell and Philip C. Kutzko. *The admissible dual of* $\mathrm{GL}(N)$ *via compact open subgroups.* Princeton University Press, Princeton, NJ, 1993.

10 Colin J. Bushnell and Philip C. Kutzko. Smooth representations of reductive p-adic groups : structure theory via types. *Proc. London Math. Soc. (3)*, 77(3) :582–634, 1998.

11 Colin J. Bushnell and Philip C. Kutzko. Semisimple types in GL_n. *Compositio Math.*, 119(1) :53–97, 1999.

12 Lawrence Morris. Tamely ramified intertwining algebras. *Invent. Math.*, 114(1) :1–54, 1993.

13 I. Reiner. *Maximal orders.* Academic Press [A subsidiary of Harcourt Brace Jovanovich, Publishers], London-New York, 1975. London Mathematical Society Monographs, No. 5.

14 Vincent Sécherre. Représentations lisses de $\mathrm{GL}(m, D)$. I. Caractères simples. *Bull. Soc. Math. France*, 132(3) :327–396, 2004.

15 Jean-Pierre Serre. *Corps locaux.* Hermann, Paris, 1968. Deuxième édition, Publications de l'Université de Nancago, No. VIII.

16 André Weil. *Basic number theory.* Springer-Verlag, New York, third edition, 1974. Die Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, Band 144.

17 Ernst-Wilhelm Zink. Weil-Darstellungen und lokale Galoistheorie. *Math. Nachr.*, 92 :265–288, 1979.

18 Ernst-Wilhelm Zink. More on embeddings of local fields in simple algebras. *J. Number Theory*, 77(1) :51–61, 1999.

Vincent Sécherre secherre@iml.univ-mrs.fr
Université d'Aix-Marseille II, Institut de Mathématiques de Luminy, 163, avenue de Luminy – Case 907, 13288 Marseille Cedex 9, France.