Unicité pour les solutions de systèmes 1-D de lois de conservation

LUC ROBBIANO

Université de Paris-Val de Marne, UFR de Sciences
Av. du Général De Gaulle, 94010 Créteil Cedex

Université de Paris-Sud, Département de Mathématiques
Bât. 425, Orsay Cedex

CNRS Orsay URA 760

Introduction

Le problème de l'unicité pour les systèmes de lois de conservation apparaît dans la littérature mais les résultats sont partiels. Il faut mettre à part le cas scalaire qui a été résolu par KRUZKOV [10]. Dans le cas des systèmes un certain nombre de résultats sont connus. Ils traitent soit de systèmes particuliers, soit ils prouvent l'unicité pour une classe restreinte de solutions. Il faut citer HURD [9], LIU [14], FABRIZIO et SANTI [6], ALINHAC [1], DAFERMOS et GENG [4], HEIBIG [7], [8]. Le résultat le plus significatif a été démontré par DI PERNA [5] pour les systèmes de deux lois.

Ici nous nous sommes inspiré de la méthode de OLEINIK [16] reprise par HURD [9] et récemment par LE FLOCH et XIN [13] (voir également BARDOS [3] et SMOLLER [18]). La méthode de démonstration consiste à reprendre celle du théorème de Holmgren. La différence de deux solutions vérifie un système d'équations. L'idée est de construire suffisamment de solutions pour le système adjoint. Ce système est à coefficients bornés. On est donc amené à régulariser les coefficients. Le problème est de s'assurer que la famille de solutions a une dérivée par rapport à x (variable d'espace) bornée dans L^2. Cela introduit naturellement une condition sur les solutions. Cette condition n'est pas une condition d'entropie, mais on démontre que les solutions du problème de Riemann pour de petites oscillations, obtenues par la méthode de LAX [11], [12] vérifient cette condition. De même les “mauvaises” solutions (i.e. les chocs ne vérifiant pas la condition de Lax) obtenues par cette méthode ne vérifient jamais cette condition. LE FLOCH et XIN [13] appliquent une méthode proche de celle utilisée ici, et sur des systèmes particuliers, ils arrivent à montrer que des conditions de type entropie impliquent une condition plus technique (ressemblant à celle obenue ici) impliquant elle-même l'unicité.

1. Notations et résultats

Soit $\mathcal{D}$ un domaine convexe de $\mathbb{R}^n$. Nous considérons les solutions du système

$$\partial_t u + \partial_x f(u) = 0 \tag{1}$$

où

$$u : [0,T[\times]-\alpha,\alpha[\longrightarrow \mathcal{D}$$
$$f : \mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

f est supposée C^∞, α et T sont positifs.

On suppose que sur $t = 0$

$$u(0,x) = u_0(x) \tag{2}$$

où $u_0(x) \in L^\infty(]-\alpha,\alpha[,\mathcal{D})$ est une donnée. On note

$$A(u_1,u_2) = \int_0^1 f'((1-s)\,u_1 + s\,u_2)\,ds$$

et $\mathcal{S}_n$ l'ensemble des matrices $n \times n$ symétriques.

Définition. On dit que $S(u_1,u_2) : \mathcal{D}^2 \longrightarrow \mathcal{S}_n$ est un symétriseur de ${}^tA(u_1,u_2)$ si

i) $S(u_1,u_2)$ est une matrice symétrique positive. Plus précisément, il existe $c > 0$ telle que pour tout $u_1,u_2 \in \mathcal{D}$

$$S(u_1,u_2) \geq C\,\mathrm{Id}.$$

ii) $S(u_1,u_2)\,{}^tA(u_1,u_2)$ est une matrice symétrique.

iii) Pour tout $u_1,u_2 \in \mathcal{D}$, $S(u_1,u_2) = S(u_2,u_1)$.

Nous avons à traiter des fonctions u définies pour tout $t \geq 0$ et nous prolongerons u à $t < 0$ en posant pour tout $t < 0$, $u(t,x) = u(-t,x)$.

Pour $\varepsilon > 0$ nous noterons

$$u_\varepsilon = \varphi_\varepsilon * u \quad \text{où} \quad \varphi_\varepsilon(x,t) = \frac{1}{\varepsilon^2}\,\varphi\Big(\frac{t}{\varepsilon}, \frac{x}{\varepsilon}\Big)$$

avec $0 \leq \varphi \leq 1$, φ à support dans $[-1,1]$ et $\int \varphi(x)\,dx = 1$.

Si u n'est définie que pour $t \geq 0$, nous utilisons pour la définition u_ε le prolongement de u défini plus haut.

Théorème 1. *Soit u une solution de (1) et (2), $u \in L^\infty([0,T[\times I, \mathcal{D})$ $(I =]-\alpha, \alpha[)$. On suppose qu'il existe $S(u_1,u_2)$ un symétriseur de ${}^tA(u_1,u_2)$ vérifiant*

(3) *il existe $C > 0$ et $\beta \in [0,1[$ telles que pour tout $u_1, u_2 \in \mathcal{D}$ et tout ε,*

$$\partial_{u_1} S(u_1,u_2)\,\partial_t u_\varepsilon - \partial_{u_1}\big(S(u_1,u_2)\,{}^tA(u_1,u_2)\big)\,\partial_x u_\varepsilon + \big(\partial_{u_1} S(u_1,u_2)\,\partial_x u_\varepsilon\big)\,{}^tA(u_1,u_2)$$
$$+A(u_1,u_2)(\partial u_1 S(u_1,u_2)\,\partial_x u_\varepsilon\big) + \beta t^{-1} S(u_1,u_2) \geq -C\,Id.$$

Alors il existe $T' > 0$ et $I' =]-\eta, \eta[\subset I$ tels que u est l'unique solution dans $L^\infty([0,T'] \times I', \mathcal{D})$ de (1), (2) vérifiant (3).

Avant de faire des commentaires sur le théorème 1, nous allons donner une proposition concernant les solutions à petites oscillations. On suppose que $u_0(x)$ est donnée par

$$u_0 = \begin{cases} u_- & \text{si } x < 0 \\ u_+ & \text{si } x > 0 \end{cases} \tag{4}$$

où u_- et u_+ sont des constantes de $\mathbb{R}^n$. On suppose de plus que $|u_- - u_+| < \delta_0$ avec δ_0 assez petit. On peut alors appliquer la méthode de Lax [11] et [12] pour construire $u(t,x)$. Pour cela on suppose

(5) $f'(u_-)$ a n valeurs propres (réelles) distinctes.

(6) Les valeurs propres de $f'(u_-)$ sont vraiment non linéaires

(voir § 4. pour une définition précise).

On pose $\mathcal{D} = B(u_-, C\delta)$ où C est une constante fixée et $\delta = |u_- - u_+|$.

Proposition 2. *Soit $u(t,x)$ la solution du problème (1), (2), où u_0 est donnée par (4), construite par la méthode de Lax (voir § 4. pour cette construction), alors il existe $S(u_1,u_2)$ un symétriseur de ${}^tA(u_1,u_2)$ dans $\mathcal{D}$ tel que S, A et u vérifient la condition (3) du théorème 1. C'est donc la seule solution du problème (1), (2) vérifiant (3).*

Remarques.

(i) La condition (3) porte sur u_ε (on préfèrerait avoir une condition sur u). Néanmoins si (3) est vraie avec $\beta = 0$ et u_ε remplacée par u alors (3) est également vraie avec u_ε (et $\beta = 0$). Le terme avec $\beta \neq 0$ est nécessaire quand on a une solution de type onde de raréfaction. On verra dans la preuve de la proposition 2 que la vérification de (3) avec u_ε ne pose pas de gros problèmes supplémentaires par rapport à la vérification de (3) avec u.

(ii) Malgré sa forme, (3) n'est pas une condition d'entropie. En effet (3) n'est pas invariante par changement de S. D'autre part, on verra dans la preuve de la proposition 2 qu'il faut choisir S en fonction de u. En particulier, rien n'exclut qu'il existe deux solutions de (1) avec les mêmes donnéeset que pour chacune des deux solutions, il ex iste un symétriseur vérifiant (3). Une telle pathologie n'existe pas pour les chocs ne vérifiant pas les conditions de Lax. Précisément pour ces chocs, il n'existe pas de symétriseur à ${}^tA$ vérifiant (3).

(iii) La condition (3) fait intervenir $\mathcal{D}$ le domaine des valeurs prises par la solution. Bien sûr, plus $\mathcal{D}$ est grand et plus (3) est restrictive. Il se peut que pour $\mathcal{D}$ assez grand (3) ne soit jamais vérifiée. C'est probablement ce qui se passe pour le contre-exemple de Sever [17]. En effet, les solutions de Sever ne sont pas explicites mais tout laisse supposer qu'elles sont à valeurs dans un domaine assez grand.

(iv) La condition (3) est assez souple pour absorber les perturbations. Les chocs simples construits par Majda [15] (dans le cas 1-D), où les ondes de raréfactions construites par Alinhac [2] (cas 1-D) vérifient la condition (3) avec le symétriseur construit pour les états constants dont l'existence est assurée par la proposition 2.

(v) La technique utilisée ici est proche de celle de Le Floch et Xin [13]. Ils étudient aussi (pour une des deux méthodes qu'ils développent) le problème adjoint. La différence essentielle est qu'ils ont privilégié la recherche de conditions d'entropie. Pour cela ils imposent des conditions très rigides sur les équations étudiées. Ils traitent ainsi les équations scalaires et le $p-$système.

2. Régularité des solutions d'un problème à coefficients dépendant d'un paramètre

Pour étudier l'unicité, nous serons amenés à étudier l'existence d'une solution pour un problème adjoint. Nous donnons ici le résultat qui nous sera utile plus loin même si la pertinence de cette étude ne sera justifiée qu'au paragraphe 3.

Soit $S_\varepsilon(t,x)$ et $B_\varepsilon(t,x)$ des matrices symétriques et régulières (c'est-à-dire $C^\infty(\mathbb{R}^2)$) pour tout $\varepsilon > 0$.

On suppose qu'il existe $C > 0$ et $\delta > 0$ telles que pour tout $\varepsilon > 0$

$$\begin{aligned} &||A_\varepsilon||_{L^\infty} + ||S_\varepsilon||_{L^\infty} \leq C \\ &S_\varepsilon \geq \delta I\,. \end{aligned} \tag{7}$$

On note ϕ_ε la solution du problème

$$\begin{cases} S_\varepsilon\, \partial_t\, \phi_\varepsilon + B_\varepsilon\, \partial_x\, \phi_\varepsilon = 0 \\ \phi_\varepsilon|_{t=T} = \varphi \end{cases} \tag{8}$$

où $\varphi \in C_0^\infty([-\gamma,\gamma])$ pour $\gamma > 0$. (φ ne dépend pas de ε.)

Lemme 3. *On suppose qu'il existe $C_1 > 0$ et $\beta \geq 0$ telles que pour tout $\varepsilon > 0$*

$$\partial_t\, S_\varepsilon - \partial_x\, B_\varepsilon \cdot \partial_x\, S_\varepsilon \cdot S_\varepsilon^{-1} \cdot B_\varepsilon + {}^t(\partial_x\, S_\varepsilon \cdot S_\varepsilon^{-1} \cdot B_\varepsilon) + \frac{\beta}{t}\, S_\varepsilon \geq -C_1\, I \tag{9}$$

alors il existe C_2 (indépendant de ε) telle que

$$||\phi_\varepsilon(t,\cdot)||_{H^1} \leq \frac{C_2}{t^{\beta/2}} \quad \textit{pour} \ \ 0 < t \leq T\,.$$

Preuve. Pour simplifier les notations on omettra les ε. Le système étant hyperbolique, ϕ est à support compact en x avec un support inclus dans un compact indépendant de ε. Il suffit donc de contrôler la norme L^2 de $\partial_x \phi$ pour obtenir le lemme 3. On note $\psi = \partial_x \phi$, ψ vérifie l'équation

$$S \cdot \partial_t\, \psi + B \cdot \partial_x\, \psi + \partial_x\, S \cdot \partial_t\, \phi + \partial_x\, B \cdot \psi = 0$$

or $\partial_t \phi = -S^{-1} B\psi$, ψ est donc la solution du système

$$\begin{cases} S \cdot \partial_t \psi + B \cdot \partial_x \psi + (\partial_x B - \partial_x S \cdot S^{-1} \cdot B) \cdot \psi = 0 \\ \psi|_{t=T} = \partial_x \varphi . \end{cases}$$

Posons

$$\begin{aligned} g(t) &= \int t^{\beta}\, {}^t\psi(t,x) \cdot S(t,x) \cdot \psi(t,x)\, dx \\ &= (t^{\beta} S \cdot \psi, \psi) \end{aligned}$$

et $K = \partial_x B - \partial_x S \cdot S^{-1} \cdot B$.

Calculons

$$\begin{aligned} \partial_t g(t) &= (\beta t^{\beta-1} S\psi, \psi) + (t^{\beta} \partial_t S \psi, \psi) \\ &\quad + 2\mathcal{R}e\, (t^{\beta} S\, \partial_t \psi, \psi) \\ &= (\beta t^{\beta-1} S\psi, \psi) + (t^{\beta} \partial_t S \psi, \psi) \\ &\quad - 2\mathcal{R}e\, (t^{\beta} (B\, \partial_x \psi + K\psi), \psi) \end{aligned}$$

or

$$2\mathcal{R}e\, (t^{\beta} B\, \partial_x \psi, \psi) = (-t^{\beta} \partial_x B \psi, \psi),$$

d'où

$$\partial_t g = (t^{\beta} Q \psi, \psi)$$

avec $Q = \frac{\beta}{t} S + \partial_t S + \partial_x B - K - {}^t K$.

L'hypothèse (9) est que $Q \geq -C_2 I$ ce qui est équivalent à $Q \geq -C S$ avec C indépendant de ε. On obtient donc l'inégalité

$$\partial_t g \geq -C g \quad \text{pour } \ t > 0 .$$

Le lemme de Gronwall implique que

$$g(t) \leq g(T)\, e^{-C(t-T)},$$

ce qui implique le lemme 3.

3. Preuve du théorème 1

On suppose qu'il existe deux solutions au problème (1), (2) vérifiant la condition (3). Notons $w = u - v$, w vérifie l'équation

$$\begin{cases} \partial_t w + \partial_x [A(u,v)\, w] = 0 \\ \qquad\qquad w|_{t=0} = 0 . \end{cases} \tag{10}$$

Pour $\phi \in C^\infty$ à support compact en x, on a

$$0 = \int_0^\tau \int \Big[\partial_t w + \partial_x[A(u,v)\cdot w]\Big]\,\phi(t,x)\,dx\,dt$$
$$0 = \int w(\tau,x)\,\phi(\tau,x)\,dx - \int_0^\tau \int w\Big[\partial_t\phi + {}^tA(u,v)\,\partial_x\phi(t,x)\Big]\,dx\,dt\,.$$

La méthode de Holmgren consiste usuellement à résoudre l'équation $\partial_t\phi + {}^tA(u,v)\,\partial_x\phi = 0$ avec ϕ donnée sur $t = \tau$. Ici u et v étant L^∞, la résolution de cette équation n'est pas standard. En régularisant u et v, on peut résoudre le problème

$$\left\{\begin{aligned} \partial_t\,\phi_\varepsilon + {}^tA(u_\varepsilon,v_\varepsilon)\,\partial x\,\phi_\varepsilon &= 0\\ \phi_\varepsilon|_{t=\tau} &= \varphi(x)\end{aligned}\right. \tag{12}$$

où $\varphi \in C_0^\infty(]-\eta,\eta[)$ (η et τ sont choisis de sorte que le support de ϕ_ε reste dans $[0,T]\times]-\alpha,\alpha[$ pour tout $\varepsilon > 0$, cela est possible si η et τ sont petits car u et $v \in L^\infty$).

En remplaçant dans (11) ϕ par ϕ_ε et $\partial_t\,\phi_\varepsilon$ par $-{}^tA(u_\varepsilon,v_\varepsilon)\,\partial_x\,\phi_\varepsilon$, on obtient

$$\int w(\tau,x)\,\varphi(x)\,dx = \int_0^\tau \int w\Big[{}^tA(u,v) - {}^tA(u_\varepsilon,v_\varepsilon)\Big]\,\partial_x\,\phi_\varepsilon\,dx\,dt\,. \tag{13}$$

Si le membre de droite de (13) converge vers 0 quand ε tend vers 0, on aura que $\int w(t,x)\,\varphi(x)\,dx = 0$ pour tout $\varphi \in C_0^\infty(]-\eta,\eta[)$ donc que $w(\tau,x) = 0$.

Démontrons tout d'abord que $\partial_x\,\phi_\varepsilon$ est borné dans L^2. Pour cela appliquons le lemme 3 avec $B_\varepsilon = S(u_\varepsilon,v_\varepsilon)^tA(u_\varepsilon,v_\varepsilon)$ et $S_\varepsilon = S(u_\varepsilon,v_\varepsilon)$. ϕ_ε vérifie

$$S_\varepsilon\,\partial_t\,\phi_\varepsilon + B_\varepsilon\,\partial_x\,\phi_\varepsilon = 0\,.$$

Il suffit que la condition (9) soit vérifiée.

Notons $D(u_\varepsilon,v_\varepsilon)$, soit $S(u_\varepsilon,v_\varepsilon)$, soit $S(u_\varepsilon,v_\varepsilon)\,{}^tA(u_\varepsilon,v_\varepsilon)$; notons y, soit t, soit x on a

$$\partial_y(D(u_\varepsilon,v_\varepsilon)) = (\partial_{u_1}D)(u_\varepsilon,v_\varepsilon)\,\partial_y\,u_\varepsilon + (\partial_{u_2}D)(u_\varepsilon,v_\varepsilon)\,\partial_y\,v_\varepsilon\,.$$

Or $D(u,v) = D(v,u)$ par construction donc $(\partial_{u_1}D)(u,v) = (\partial_{u_2}D)(v,u)$, on obtient

$$\partial_y(D(u_\varepsilon,v_\varepsilon)) = (\partial_{u_1}D)(u_\varepsilon,v_\varepsilon)\,\partial_y\,u_\varepsilon + (\partial_{u_1}D)(v_\varepsilon,u_\varepsilon)\,\partial_y\,v_\varepsilon\,. \tag{14}$$

On remplace, dans l'hypothèse (3), u_1 et u_2 respectivement par u_ε et v_ε. De même, on remplace dans (3), u_1, u_2 et u_ε respectivement par v_ε, u_ε et v_ε. On ajoute les deux inégalités ainsi obtenues, et on obtient alors l'inégalité (9) où β est remplacé par 2β. Du lemme 3, on obtient

$$||\phi_\varepsilon(t,\cdot)||_{H'} \leq \frac{C}{t^\beta} \quad \text{pour } \ 0 < t \leq T\,.$$

Outre cela, on va utiliser pour majorer le côté droit de (13), que u est borné et que

$$|A(u_1,v_1) - A(u_2,v_2)| \leq C(|u_1-u_2| + |v_1-v_2|)\,.$$

On a donc

$$\text{(15)} \qquad \Big|\int w(\tau,x)\,\varphi(x)\,dx\Big| \leq$$
$$\leq C\int_0^\tau \Big(\int \big(|u-u_\varepsilon|^2 + |v-v_\varepsilon|^2\big)\,dx\Big)^{1/2}\Big(\int |\partial_x\phi_\varepsilon|\,dx\Big)^{1/2} dt$$
$$\leq C\int_0^\tau \frac{1}{t^\beta}\Big(\int |u-u_\varepsilon|^2 + |v-v_\varepsilon|^2\,dx\Big)^{1/2} dt\,.$$

Comme $\beta < 1$, il existe $p > 1$ tel que $\beta p < 1$. On note q le réel tel que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, on obtient de (15) en majorant la norme L^2 par la norme L^q et en appliquant l'inégalité de Hölder

$$\Big|\int w(\tau,x)\,\varphi(x)\,dx\Big| \leq C\Big(\int_0^\tau \frac{1}{t^{\beta p}}\,dt\Big)^{1/p}\Big(\int_0^\tau |u-u_\varepsilon|^q + |v-v_\varepsilon|^q\,dx\,dt\Big)^{1/q}.$$

Or $u_\varepsilon \to u$ et $v_\varepsilon \to v$ dans L^q (car u et v sont bornées et à support compact) donc cela implique que

$$\int w(\tau,x)\,\varphi(x)\,dx = 0\,.$$

Cela implique classiquement que $w = 0$ donc $u = v$.

4. Preuve de la proposition 2

Pour tester la condition (3) du théorème 1, nous avons besoin de connaître précisément la solution. Nous allons rappeler ici la construction de Lax, ce qui permettra de fixer les notations. L'hypothèse (5) est $f'(u_-)$ à n valeurs propres distinctes, nécessairement réelles car $f'(u_-)$ est symétrisable. Donc pour u_1, u_2 proches de u_-, $A(u_1,u_2)$ à n valeurs propres réelles distinctes. On note $\lambda_j(u_1,u_2)$ la $j-$ ème valeur propre de $A(u_1,u_2)$, et $r_j(u_1,u_2)$ et $\ell_j(u_1,u_2)$ respectivement le vecteur propre à droite et à gauche associé, c'est-à-dire

$$\begin{aligned} &A r_j = \lambda_j r_j \\ \text{et} \qquad &{}^t\ell_j A = \lambda_j\,{}^t\ell_j\,. \end{aligned}$$

L'hypothèse (6) signifie que $\partial_u \tilde{\lambda}_j(u) \cdot \tilde{r}_j(u) \neq 0$ si $f(u)\tilde{r}_j(u) = \tilde{\lambda}_j \tilde{r}_j(u)$, u proche de u_-. Ici on a clairement que $\tilde{\lambda}_j(u) = \lambda_j(u,u)$ et $\tilde{r}_j(u) = r_j(u,u)$. Usuellement on normalise par $\partial_u \tilde{\lambda}_j(u) \cdot \tilde{r}_j(u) = 1$.

Ici, on normalise r_j de sorte que,

$$(\nabla_{u_1} + \nabla_{u_2})\lambda_j(u_1, u_2) \cdot r_j(u_1, u_2) = 1$$

ce qui est cohérent avec la normalisation usuelle, et on normalise ℓ_j de sorte que,

$$^t\ell_j \, r_\nu = \delta_{j\nu} \, .$$

On a donc

$$A = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \, r_j \, ^t\ell_j$$

(pour plus de clarté on ne note pas les variables u_1, u_2 quand elles ne sont pas nécessaires).

Les symétriseurs de ^tA sont de la forme

$$S = \sum_{j=1}^{n} e^{\gamma_j} \, r_j \, ^t r_j$$

où γ_j est une application symétrique de (u_1, u_2).

Les solutions de Lax sont soit des chocs, soit des ondes de détente. Nous allonsdécrire la solution dans chacun de ces cas.

Description d'un k–choc

On cherche u, la solution sous la forme particulière suivante. On se donne $u_- \in \mathbb{R}^n$ qui est égal à u_0 pour $x < 0$, et on cherche $u_+ \in \mathbb{R}^n$ ($u_+ = u_0$ pour $x > 0$) et $s \in \mathbb{R}$ tels que

$$u(t,x) = \begin{cases} u_- & \text{pour} \quad x < st \\ u_+ & \text{pour} \quad x > st \, . \end{cases}$$

Alors u_-, u_+ et s sont reliés par la condition de saut (déduite de l'équation (1))

$$f(u_+) - f(u_-) = s(u_+ - u_-) \, . \tag{16}$$

Cette équation admet une famille de solutions dépendant d'un paramètre $\delta \in \mathbb{R}$ (δ proche de 0) et on peut normaliser δ de sorte que

$$\begin{aligned} u_+(\delta) &= u_- + \delta r_k + O(\delta^2) \\ s(\delta) &= \lambda_k(u_-, u_-) + \frac{\delta}{2} + O(\delta^2) . \end{aligned} \tag{17}$$

La condition de Lax est $\lambda_k(u_+, u_+) < \lambda_k(u_-, u_-)$. Comme

$$\lambda_k(u_+, u_+) = \lambda_k(u_-, u_-) + \delta(\nabla v_1 + \nabla v_2)\,\lambda_k(u_-, u_-) \cdot r_k(u_-, u_-) + O(\delta^2)$$

$$\lambda_k(u_+, u_+) = \lambda_k(u_-, u_-) + \delta + O(\delta^2) , \tag{17$'$}$$

la condition de Lax est équivalente à $\delta < 0$ (pour δ petit).

Appelons $\Sigma = \{x = st\}$, on a

$$\begin{aligned} u'_x &= (u_+ - u_-)\,\delta_\Sigma \\ u'_t &= s(u_- - u_+)\,\delta_\Sigma \end{aligned}$$

($(\delta_\Sigma, \varphi) = \int \varphi(st, t)\, dt$ pour $\varphi \in C_0^\infty$).

Le développement de (17) donne

$$\begin{aligned} u'_x &= \delta(r_k + O(\delta))\,\delta_\Sigma \\ u'_t &= -\delta(\lambda_k r_k + O(\delta))\,\delta_\Sigma . \end{aligned} \tag{18}$$

Description d'une k-onde de détente

On cherche une solution de (1) sous la forme $u = h\left(\frac{x}{t}\right)$ avec $h(\alpha) = u_-$ pour $\alpha < \lambda_k(u_-, u_-)$, alors h doit vérifier l'équation différentielle

$$\dot{h}(\alpha) = r_k(h(\alpha), h(\alpha))$$

$$h(\lambda_k(u_-, u_-)) = u_- .$$

On vérifie (en dérivant par rapport à α) que h et λ_k sont reliées par

$$\lambda_k(h(\alpha), h(\alpha)) = \alpha .$$

La solution u de (1) est donnée par

$$u(t,x) = \begin{cases} u_- & \text{si} \quad \dfrac{x}{t} < \lambda_k(u_-,u_-) \\ h\Big(\dfrac{x}{t}\Big) & \text{si} \quad \lambda_k(u_-,u_-) < \dfrac{x}{t} < \alpha_1 \\ h(\alpha_1) & \text{si} \quad \alpha_1 < \dfrac{x}{t}. \end{cases}$$

Ici $u_+ = h(\alpha_1)$. Posons

$$\delta = \lambda_k(h(\alpha_1), h(\alpha_1)) - \lambda_k(u_-,u_-) = \alpha_1 - \alpha_0\,,$$

en notant $\alpha_0 = \lambda_k(u_-,u_-)$. On obtient que

$$\begin{aligned} u_+(\delta) = h(\alpha_1) &= h(\alpha_0) + (\alpha_1 - \alpha_0)\,h'(\alpha_0) + O(\delta^2) \\ &= u_- + \delta\, r_k(u_-,u_-) + O(\delta^2)\,. \end{aligned}$$

Comme par définition

$$\lambda_k(u_+,u_+) = \lambda_k(u_-,u_-) + \delta\,,$$

on obtient des formules analogues aux formules (17) et (17)'.

Le calcul des dérivées de u montre que

$$u'_x = \begin{cases} O & \frac{x}{t} < \alpha_0 \\ \frac{1}{t}\, r_k\Big(h\Big(\frac{x}{t}\Big), h\Big(\frac{x}{t}\Big)\Big) & \alpha_0 < \frac{x}{t} < \alpha_1 \\ O & \alpha_1 < \frac{x}{t} \end{cases}$$

(19)

$$u'_t = \begin{cases} O & \frac{x}{t} < \alpha_0 \\ -\frac{x}{t^2}\, r_k\Big(h\Big(\frac{x}{t}\Big), h\Big(\frac{x}{t}\Big)\Big) & \alpha_0 < \frac{x}{t} < \alpha_1 \\ O & \alpha_1 < \frac{x}{t} \end{cases}$$

Recherche d'un symétriseur adapté à un k-choc ou une k-onde de détente

Le problème est de trouver un symétriseur tel que u vérifie la condition (3) quand u est soit un $k-$choc soit une $k-$onde de détente. On a

$$S = \sum_{j=1}^{n} e^{\gamma_j}\, r_j\, {}^t r_j$$

donc

$$\partial_{u_1} S = \sum_{j=1}^{n} e^{\gamma_j}\, \partial_{u_1}(\gamma_j)\, r_j\, {}^t r_j + \sum_{j=1}^{n} e^{\gamma_j} \Big[\partial_{u_1}(r_j)\, {}^t r_j + r_j\, \partial_{u_1}({}^t r_j)\Big]$$

$$S\, {}^t A = \sum_{j=1}^{n} e^{\gamma_j}\, \lambda_j\, r_j\, {}^t r_j$$

et

$$\partial_{u_1}(S\, {}^t A) = \sum_{j=1}^{n} e^{\gamma_j}\, \partial_{u_1}(\gamma_j)\, \lambda_j\, r_j\, {}^t r_j + \sum_{j=1}^{n} e^{\gamma_j} \Big[\partial_{u_1}(\lambda_j)\, r_j\, {}^t r_j + \lambda_j \big(\partial_{u_1}(r_j)\, {}^t r_j + r_j\, \partial_{u_1}({}^t r_j)\big)\Big]\,.$$

Un calcul élémentaire montre que

$$\begin{aligned} A(\partial_{u_1} S \cdot \partial_x u_\varepsilon) &= \sum_{j=1}^{n} \big(\partial_{u_1}(\gamma_j)\, \partial_x u_\varepsilon\big)\, e^{\gamma_j}\, \lambda_j\, r_j\, {}^t r_j \\ &\quad + \sum_{j=1}^{n} e^{\gamma_j}\, \lambda_j\, r_j\, {}^t\big(\partial_{u_1}(r_j)\, \partial_x u_\varepsilon\big) + \sum_{j=1}^{n} \sum_{\nu=1}^{n} e^{\gamma_j}\, \lambda_\nu\, r_\nu\, {}^t \ell_\nu \big(\partial_{u_1}(r_j)\, \partial_x u_\varepsilon\big)\, {}^t r_j\,. \end{aligned} \tag{20}$$

Dans le calcul qui va suivre on fait en sorte que $\partial_{u_1} \gamma_j$ soit très grand par rapport à γ_j. On traite donc dans un premier temps les termes dépendant de $\partial_{u_1} \gamma_j$ dans la condition (3), les autres termes sont appelés “Restes”. La condition (3) donne

$$\sum_{j=1}^{n} \Big(\partial_{u_1} \gamma_j\, \partial_t u_\varepsilon + \lambda_j\, \partial_{u_1} \gamma_j\, \partial_x u_\varepsilon\Big)\, e^{\gamma_j}\, r_j\, {}^t r_j + \text{Reste} \geq -CI\,. \tag{21}$$

Pour un $k-$choc on va calculer (21) en remplaçant u_ε par u et on verra plus loin que le passage de la condition avec u à la condition avec u_ε est aisé.

En reprenant les formules (18) on a

$$\partial_{u_1} \gamma_j\, \partial_t u + \lambda_j\, \partial_{u_1} \gamma_j\, \partial_x u = \delta(\lambda_j - \lambda_k)\, \partial_{u_1} \gamma_j \cdot r_k [1 + O(\delta)]\, \delta_\Sigma\,. \tag{22}$$

Pour une $k-$onde de détente on va aussi calculer (21) pour u. Le passage de u à u_ε est un peu plus subtil et sera expliqué plus loin.

On reprend les formules (19) et on obtient

$$\partial_{u_1} \gamma_j\, \partial_t u + \lambda_j\, \partial_{u_1} \gamma_j\, \partial_x u = \frac{1}{t} \Big(\lambda_j - \frac{x}{t}\Big)\, \partial_{u_1} \gamma_j\, r_k \Big(h\Big(\frac{x}{t}\Big), h\Big(\frac{x}{t}\Big)\Big) \tag{23}$$

ceci pour $\frac{x}{t} \in [\alpha_0, \alpha_1]$ sinon $\partial_t u = \partial_x u = 0$. On rappelle que $\alpha_0 = \lambda_k(u_-, u_-)$ et $\alpha_1 = \lambda_k(u_-, u_-) + O(\delta)$. Donc si $j \neq k$ dans les formules (22) et (23) les quantités qui apparaissent sont non nulles.

Posons

$$\gamma_j = \mu\, {}^t\ell_k(u_-, u_-)(u_1 + u_2 - 2u_-)(\lambda_j(u_-, u_-) - \lambda_k(u_-, u_-))\, \alpha_k$$

où μ est une grande constante et

$$\alpha_k = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad u \ \text{est une} \ k - \text{onde} \\ -1 & \text{si} \quad u \ \text{est un} \ k - \text{choc}, \end{cases}$$

il est clair que les quantités (22) et (23) sont égales à μ fois une quantité positive. D'autre part, il est évident que si u est une superposition de chocs et d'ondes, on peut prendre

$$\gamma_j = \sum_{k=1}^{n} \mu\, {}^t\ell_k(u_1 + u_2 - 2u_-)(\lambda_j - \lambda_k)\, \alpha_k$$

avec

$$\alpha_k = \begin{cases} 1 & \text{si le} \quad k - \text{ème motif est une onde} \\ -1 & \text{si le} \quad k - \text{ème motif est un choc}. \end{cases}$$

Clairement le raisonnement ci-dessus ne donne rien pour $j = k$. Grâce à la grande constante μ il suffit de calculer le reste sur le vecteur ℓ_k. Plus précisément, on calcule ${}^t\ell_k \cdot \text{reste} \cdot \ell_k$. Tout calcul fait on obtient

$$e^{\gamma_k}\left[2\, {}^t\ell_k(\partial_{u_1} r_k) \cdot (\partial_t u + \lambda_k\, \partial_x u) - \partial_{u_1} \lambda_k \cdot \partial_x u + \frac{\beta}{t}\right].$$

Pour un $k-$choc $\partial_t u + \lambda_k(u_1, u_2)\partial_x u$ est un $O(\delta^2)\delta_\Sigma$. Pour une $k-$onde de détente $\partial_t u + \lambda_k(u_1, u_2)\partial_x u$ est un $\frac{1}{t}O(\delta)$. Dans les deux cas $-\partial_{u_1} \lambda_k\, \partial_x u$ est le terme dominant.

Pour un $k-$choc

$$-\partial_{u_1}(\lambda_k)\, \partial_x u = -\delta(\partial_{u_1} \lambda_k \cdot r_k + O(\delta))\, \delta_\Sigma \geq 0 \quad (\text{car } \delta < 0).$$

Donc la condition (3) est vérifiée pour δ suffisamment petit.

Pour une $k-$onde de raréfaction

$$-\partial_{v_1}(\lambda_k)\, \partial_x u = -\frac{1}{t}\, \partial_{v_1} \lambda_k \cdot r_k \quad \text{pour} \ \frac{x}{t} \in]\alpha_0, \alpha_1[. \tag{24}$$

Ici le fait de tester la condition sur u_ε à la place de u est importante. Le problème est que $\varphi_\varepsilon * \frac{1}{t}$ n'est pas défini. On remarque que $-\partial_{v_1}(\lambda_k)\partial_x u$ n'est de l'ordre de $\frac{1}{t}$ seulement pour $\frac{x}{t} \in]\alpha_0, \alpha_1[$. On exploite cela grâce au lemme suivant.

Lemme 4. *Soit $v(t) \in L^\infty(\mathbb{R})$ vérifiant*

$$|v(t)| \leq A$$

$$|\partial_t v(t)| \leq \frac{B}{|t|}$$

où A et B sont des constantes, alors

$$|\partial_t v_\varepsilon(t)| \leq \frac{CA + B}{|t|} \quad \text{où } C = \int |\varphi'|$$

($v_\varepsilon = \varphi_\varepsilon * v$ avec $\int \varphi = 1$, $\varphi \geq 0$, supp$\varphi \subset [-1, 1]$).

Preuve. D'une part $\partial_t v_\varepsilon = \frac{1}{\varepsilon}(\partial_t \varphi)_\varepsilon * v$ d'où

$$|\partial_t v_\varepsilon| \leq \frac{CA}{\varepsilon}.$$

D'autre part, si $|t| > \varepsilon$

$$\partial_t v_\varepsilon = \varphi_\varepsilon * \partial_t v,$$

ce qui conduit à la majoration

$$|\partial_t v_\varepsilon| \leq \frac{B}{t - \varepsilon}.$$

En optimisant les deux majorations on obtient le résultat.

Appliquons le lemme 4 à $\partial_{u_1}[\lambda_k(u_1, u_2)](u(t) - u_-) = v(t)$. On a $|v(t)| \leq \text{cste}\,\delta$ et de (24) $\partial_t v(t) = -\frac{1}{t}\partial_{u_1}(\lambda_k) r_k$.

Or d'après la normalisation, $(\partial_{u_1} + \partial_{u_2})(\lambda_k) \cdot r_k = 1$, de plus, $\lambda_k(u_1, u_2) = \lambda_k(u_2, u_1)$ donc en (u_-, u_-) on a $\partial_{u_1}\lambda_k(u_-, u_-) = \partial_{u_2}\lambda_k(u_-, u_-)$ donc $\partial_{u_1}\lambda_k(u_-, u_-) r_k(u_-, u_-) = \frac{1}{2}$ comme u varie dans un voisinage de rayon constante $\cdot\, \delta$, on a que

$$\partial_t v(t) = \frac{1}{t}\Big(-\frac{1}{2} + O(\delta)\Big).$$

Le lemme 4 implique que

$$|\partial_t v_\varepsilon| \leq \frac{1}{t}\Big(\frac{1}{2} + O(\delta)\Big).$$

Ce terme est compensé par

$$\frac{\beta}{t} {}^t\ell_k S \ell_k = \frac{\beta}{t}(1 + O(\delta))$$

en prenant par exemple $\beta = \frac{3}{4}$ et δ assez petit.

Donc la condition (3) est vérifiée pour une $k-$onde de détente.

Bibliographie

[1] S. Alinhac : *Unicité d'ondes de raréfaction pour des systèmes quasi-linéaires hyperboliques multidimensionnels,* Indiana Math. J., **38** (1989), 345-363.

[2] S. Alinhac : *Existence d'ondes de raréfaction pour des systèmes quasi-linéaires hyperboliques,* Comm. in Partial Differential Equations, **14** (1989), 173-230.

[3] C. Bardos : *Introduction aux problèmes hyperboliques non linéaires,* Lecture Notes, **1047** (1982), 1-74.

[4] C.M. Dafermos, X. Geng : *Generalized characteristics uniqueness and regularity of solutions in a hyperbolic system of conservation laws,* Ann. I.H.P., Analyse Non Linéaire, **8** (1991), 231-269.

[5] R. J. Di Perna : *Uniqueness of solutions to hyperbolic conservation laws,* Indiana Univ. Math. J., **28** (1979), 137-188.

[6] M. Fabrizio, E. Santi : *A uniqueness theorem for non linear systems of elasticity and electromagnetism,* J. of Diff. Eq., **75** (1988), 43-52.

[7] A. Heibig : *Régularité des solutions du problème de Riemann,* Comm. in Partial Differential Equations, **15** (1990), 693-709.

[8] A. Heibig : *Unicité des solutions du problème de Riemann,* CRAS, **312** (1991), 793-797.

[9] A.E. Hurd : *A uniqueness theorem for weak solutions of symmetric quasilinear hyperbolic systems,* Pacific J. Math., **28** (1969), 555-559.

[10] S.N. Kruzkov : *First order quasilinear equations on several independent variables,* Math. USSR Sb., **10** (1970), 217-243.

[11] P.D. Lax : *Hyperbolic systems of conservation laws II,* C.P.A.M., **10** (1957), 537-566.

[12] P.D. Lax : *Shock waves and entropy,* Contributions to non linear Functionnal Analysis, E.A. Zarantonello, Academic Press 1971, 603-634.

[13] P. Le Floch, Z. Xin : *Uniqueness via the adjoint problem for systems of conservation laws,* C.P.A.M., (1993).

[14] T.P. Liu : *Uniqueness of weak solutions of the Cauchy problem for general* 2×2 *conservation laws,* J. of Diff. Eq., **20** (1976), 269-288.

[15] A. Majda : *The existence of multi-dimensional shock fronts,* Memoirs Amer. Math. Soc., **281** (1983).

[16] O.A. Oleinik : *On the uniqueness of the generalized solutions of the Cauchy problem for a nonlinear equation occuring in mechanics,* Usp. Mat. Nauk., **12** (n^o 6), (1957), 169-176 (en russe).

[17] M. Sever : *Uniqueness failure for entropy of hyperbolic systems of conservation laws,* CPAM, **42** (1989), 173-183 and CPAM, **43** (1990), 295-297.

[18] J. Smoller : *Shock waves and reaction diffusion equations,* Springer 1983.