Contrôle de l'équation de la chaleur et inégalité de Carleman

Luc Robbiano

9 mars 2011

Table des matières

Chapitre 1

Introduction

Ces notes sont la version du cours que j'ai donné à l'Université de Paris-Dauphine dans le cadre de l'accord avec l'Université de Versailles-Saint Quentin pour le Master 2. Le but est surtout de donner une preuve du contrôle de l'équation de la chaleur mais aussi de donner d'une part une introduction aux problèmes de contrôle et d'autre part une introduction aux inégalités de Carleman.

Dans le deuxième chapitre nous donnons le résultat de contrôle de Kalman[6] concernant les systèmes equations différentielles linéaires à coefficients constants. Le résultat est prouvé par une méthode de dualité inspirée par les techniques utilisées dans les chapitres suivants pour les systèmes en dimension infinie. Pour la dimension finie cette preuve n'est peut-être pas la meilleure mais elle m'a semblé être une bonne approche des techniques adaptées à la dimension infinie.

Dans le troisième chapitre nous décrivons la méthode H.U.M. (Hilbert Uniqueness Method) de Jacques-Louis Lions [9] dans le cadre de l'équation de la chaleur. Puis nous montrons le contrôle pour cette équation en supposant une inégalité d'interpolation. Nous reprenons la méthode utilisée avec Gilles Lebeau [7], avec les améliorations qu'il a apporté avec Enrique Zuazua [8] et David Jerison [5]. Pour démontrer le contrôle de l'équation de la chaleur, une autre méthode a été développée par Andrei Fursikov et Oleg Imanuvilov [2]. Elle permet entre autre d'obtenir des résultats pour des opérateurs non linéaires. Elle demande de démontrer des inégalités de Carleman globales avec des poids singuliers, ce qui présente des difficultés au moins d'ordre pédagogique. Les inégalités prouvées dans le chapitre suivant ont le mérite de permettre une certaine progression dans le traitement des difficultés.

Dans le quatrième chapitre, nous démontrons l'inégalité d'interpolation utilisée au chapitre précédent. Cela repose sur des inégalités d'interpolation locale de trois types différents, la première à l'intérieur du domaine, la deuxième au voisinage d'un point du bord où on connaît les deux données au bord, et la troisième au voisinage d'un point du bord où on ne connaît qu'une trace. Ici, on n'a traité que le cas de la condition de Dirichlet. Traiter d'autres conditions au bord demanderait d'utiliser des techniques plus sophistiquées. Ces inégalités d'interpolation locale s'obtiennent par des inégalités de Carleman. Nous avons choisi de démontrer les inégalités de Carleman "à la main", ce qui est la pire méthode qui soit mais qui ne demande aucun savoir sur les opérateurs pseudo-différentiels comme la méthode utilisée par Lars Hörmander [4]. Nous n'avons pas suivi la méthode qu'il avait auparavant développée dans [3]. Elle donne des résultats très précis (par exemple du point de vue de la régularité des

coefficients) mais elle est assez difficile à comprendre. Ici nous faisons de simples intégrations par partie, cela permet en plus de suivre assez facilement les termes de bord quand il y en a.
Dans le cinquième chapitre nous donnons quelques généralisations des résultats précédents, tout d'abord nous démontrons qu'on peut non seulement avoir le contrôle des trajectoires comme vu dans le chapitre 3 mais aussi d'un sous-espace plus grand de L^2. Nous démontrons ensuite une inégalité de type interpolation "logarithmique" obtenu par Phung [11]. Cette inégalité, sans être utile pour le contrôle de l'équation de la chaleur, a une preuve assez proche de ce qui a été fait dans le chapitre 4.
Dans l'appendice nous avons démontré qu'il est toujours possible de redresser le bord tout en mettant l'opérateur sous une forme particulière adaptée aux intégrations par partie effectuée au chapitre 4.
Sans sortir du cadre que nous nous sommes fixées (par exemple de ne pas utiliser de techniques microlocales), d'autres développements seraient possible comme par exemple la preuve du contrôle pour les équations d'évolution associées aux des laplaciens fractionnaires étudiés par Luc Miller [10].
Quelques exercices sont données à la fin des chapitres 3 et 4. Ils ont été posés aux examens de 2007 et 2008.

Chapitre 2

Contrôle des systèmes linéaires à coefficients constants en dimension finie

Dans le cas de la dimension finie, pour des système à coefficients constants, nous pouvons résoudre complètement le problème du contrôle. L'idée essentielle est de travailler par dualité, méthode qui sera exploitée intensivement en dimension infinie.
Le cadre est le suivant, soit A une matrice, $n \times n$, on étudie l'équation $\dot{x} = Ax + f$ où f est une action extérieure (continue). Il est bien connu que pour toute donnée initiale x_0 on peut résoudre l'équation d'une manière unique. Le problème du contrôle est de trouver f telle que pour une donnée initiale x_0 à $t = 0$ par exemple et une donnée finale x_1 à $t = 1$ par exemple, la solution du problème $\dot{x} = Ax + f$, $x(0) = x_0$ vérifie $x(1) = x_1$. Le problème posé ainsi se résout très simplement, on prend n'importe quelle fonction $x \in \mathcal{C}^1$ telle que $x(0) = x_0$ et $x(1) = x_1$ et on pose $f = \dot{x} - Ax$. Pour que le problème soit mathématiquement intéressant il faut donner d'autres contrainte sur f. De plus dans la pratique on a d'autres contraintes. En effet le contrôle construit ci-dessus a autant de degré de liberté que la solution. Cela n'est pratiquement jamais le cas. Pensez par exemple à la conduite automobile, l'automobile se déplace dans un plan mais nous ne pouvons nous diriger qu'en actionnant le volant ce qui est un contrôle de dimension 1. Cet exemple ne rentre pas dans le cadre défini ci-dessus mais donne je pense une idée du problème. Une contrainte classique prise sur f est de demander que $f = Bu$ où $u(t) \in \mathbb{R}^k$ et $B : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$ linéaire et indépendante du temps. Il faut garder en mémoire que $k < n$ est la condition naturelle.

Théorème 2.1 *Soit le système $\dot{x} = Ax + Bu$ où $x \in \mathbb{R}^n$, $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ et $B : \mathbb{R}^k \to R^n$ des applications linéaires, si* $\dim \mathrm{Im}(B, AB, \cdots, A^{n-1}B) = n$ *alors pour tout x_0, x_1 des éléments de $\mathbb{R}^n$, pour tout $T > 0$, il existe $u : [0,T] \to \mathbb{R}^k$ continue telle que la solution x du système vérifiant la condition initiale $x(0) = x_0$, vérifie $x(T) = x_1$.*

Nous avons noté $(B, AB, \cdots, A^{n-1}B)$ la matrice constituée des k colonnes de la matrice B, des k colonnes de la matrice AB etc.Cette matrice à donc nk colonnes et n lignes. Dans le cas $k = 1$ c'est une matrice carrée et l'hypothèse $\dim \mathrm{Im}(B, AB, \cdots, A^{n-1}B) = n$ est raisonnable. Dans le cas $k > 1$ il est possible qu'il existe $d < n$ tel que $\dim \mathrm{Im}(B, AB, \cdots, A^{d-1}B) = n$ et a fortiori la condition $\dim \mathrm{Im}(B, AB, \cdots, A^{n-1}B) = n$ sera vérifiée.
La condition $\dim \mathrm{Im}(B, AB, \cdots, A^{n-1}B) = n$ est appelée condition de Kalman.

Remarque 2.2 *Dans le même cadre que le théorème ci-dessus, si on suppose à l'inverse que* $\dim \operatorname{Im}(B, AB, \cdots, A^{n-1}B) < n$ *alors pour tout* $x_0 \in \mathbb{R}^n$ *il existe* $x_1 \in \mathbb{R}^n$ *tel que pour tout* $u : [0,T] \to \mathbb{R}^k$ *continue la solution du système vérifiant la condition initiale* $x(0) = x_0$ *est telle que* $x(T) \neq x_1$. *En fait tout* $x_1 \notin \operatorname{Im}(B, AB, \cdots, A^{n-1}B)$ *convient si* $x_0 = 0$.

Démonstration du théorème 2.1.
Traitons tout d'abord le cas $x_0 = 0$, on se réduira ensuite à ce cas par linéarité. Si u est connue, on a la formule $x(t) = \displaystyle\int_0^t e^{(t-s)A} Bu(s)ds$.

Notons $E = \{x \in \mathbb{R}^n,$ il existe u continue telle que $x = \displaystyle\int_0^T e^{(T-s)A} Bu(s)ds\}$. On cherche à prouver que $E = \mathbb{R}^n$, pour cela, on va démontrer que l'orthogonal de E est $\{0\}$. En dimension finie cela revient à travailler par dualité.
Soit $w \in E^\perp$ on a les équivalences suivantes,

$$\begin{aligned}
&\forall x \in E,\ (w|x) = 0 \\
&\qquad \Leftrightarrow (w| \int_0^T e^{(T-s)A} Bu(s)ds) = 0 \text{ pour toute fonction } u \text{ continue} \\
&\qquad \Leftrightarrow \int_0^T (w|e^{(T-s)A} Bu(s))ds = 0 \text{ pour toute fonction } u \text{ continue} \\
&\qquad \Leftrightarrow \int_0^T ({}^tBe^{(T-s){}^tA} w|u(s)) = 0 \text{ pour toute fonction } u \text{ continue} \\
&\qquad \Leftrightarrow\ {}^tBe^{(T-s){}^tA} w = 0\ \forall s \in [0,T] \\
&\qquad \Leftrightarrow \forall q \in \mathbb{N},\ {}^tB{}^tA^q w = 0 \text{ (en dérivant } q \text{ fois par rapport à } s)
\end{aligned}$$

On obtient finalement si on note

$$C_q = \begin{pmatrix} {}^tB \\ {}^tB{}^tA \\ \vdots \\ {}^tB{}^tA^q \end{pmatrix} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{k(q+1)} \tag{2.0.1}$$

$$w \in E^\perp \Leftrightarrow \forall q \in \mathbb{N},\ w \in \operatorname{Ker} C_q. \tag{2.0.2}$$

On rappelle les deux lemmes suivants.

Lemme 2.3 *Soit* C *la matrice d'une application de* $\mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^\ell$, *on a* $\operatorname{Ker} {}^tC = (\operatorname{Im} C)^\perp$.

Démonstration.
Si $u \in \operatorname{Ker} {}^tC \Leftrightarrow {}^tCu = 0 \Leftrightarrow\ \forall w \in \mathbb{R}^p,\ ({}^tCu|w) = 0 \Leftrightarrow\ \forall w \in \mathbb{R}^p,\ (u|Cw) = 0$
$\Leftrightarrow u \in (\operatorname{Im} C)^\perp$. □

Lemme 2.4 *Soit* F_j *des sous espaces vectoriels tels que* $F_j \subset F_{j+1}$ *pour* $j \in \mathbb{N}$, *on a* $\displaystyle\bigcap_{j=0}^{\infty} (F_j)^\perp = (\bigcup_{j=0}^{\infty} F_j)^\perp$.

Démonstration.
$u \in \cap_j (F_j)^\perp \Leftrightarrow \forall j,\ u \in F_j^\perp \Leftrightarrow \forall j,\ \forall w \in F_j,\ (u|w) = 0 \Leftrightarrow u \in (\cup_j F_j)^\perp.$ □

La condition (2.0.2) peut se récrire, en appliquant les lemmes 2.3 et 2.4,

$$\begin{aligned} w \in E^\perp \Leftrightarrow w \in \cap_q \operatorname{Ker} C_q \Leftrightarrow\ & w \in \cap_q (\operatorname{Im}{}^t C_q)^\perp \\ \Leftrightarrow\ & w \in \cap_q (\operatorname{Im}(B, AB, \cdots, A^q B))^\perp \\ \Leftrightarrow\ & w \in (\cup_q \operatorname{Im}(B, AB, \cdots, A^q B))^\perp \end{aligned}$$

On obtient finalement que $E = \cup_q \operatorname{Im}(B, AB, \cdots, A^q B)$.
Remarquons que si $\operatorname{Im} A^{q+1}B \subset \operatorname{Im}(B, AB, \cdots, A^q B)$ alors pour tout $p \in \mathbb{N}$, $\operatorname{Im} A^{q+p}B \subset \operatorname{Im}(B, AB, \cdots, A^q B)$. En effet il suffit de le prouver par récurrence, si pour $p \geq 2$ on a,

$$A^{q+p-1}Bw = \sum_{j=0}^{q} A^j B x_j$$

On a

$$A^{q+p}Bw = \sum_{j=0}^{q-1} A^{j+1} B x_j + A^{q+1} B x_q.$$

Et comme $A^{q+1}Bx_q$ est aussi dans $\operatorname{Im}(B, AB, \cdots, A^q B)$ nous obtenons la remarque.
Remarquons qu'il suffit de montrer que $\cup_q \operatorname{Im}(B, AB, \cdots, A^q B) = \operatorname{Im}(B, AB, \cdots, A^{n-1}B)$.
En effet si $B = 0$ cette affirmation est évidente. Si $B \neq 0$, montrons par récurrence que

$$\text{soit } \dim \operatorname{Im}(B, AB, \cdots, A^{q-1}B) \geq q \text{ pour } q \leq n \tag{2.0.3}$$
$$\text{soit } \operatorname{Im}(B, AB, \cdots, A^{q-2}B) = \operatorname{Im}(B, AB, \cdots, A^{q-1}B) \tag{2.0.4}$$

On a déja vu que dans le cas (2.0.4) alors $\operatorname{Im}(B, AB, \cdots, A^{q-1}B) = \operatorname{Im}(B, AB, \cdots, A^q B)$. Si on a (2.0.3), on a soit $\dim \operatorname{Im}(B, AB, \cdots, A^q B) \geq q + 1$ ce qu'on veut démontrer soit $\dim \operatorname{Im}(B, AB, \cdots, A^q B) = q$. Dans ce dernier cas pour une raison de dimension, on a forcément $\operatorname{Im}(A^q B) \subset \operatorname{Im}(B, AB, \cdots, A^{q-1}B)$. Ce dernier espace est de dimension q par (2.0.3), ce qui donne (2.0.4) avec q remplacé par $q+1$. Comme $\dim \operatorname{Im}(B, AB, \cdots, A^q B) \leq n$, dès que $q \geq n$, on a $\operatorname{Im}(B, AB, \cdots, A^q B) \subset \operatorname{Im}(B, AB, \cdots, A^{n-1}B)$.
Nous avons donc prouvé le théorème 2.1 ainsi que la remarque 2.2 si $x_0 = 0$. Dans le cas général on cherche la solution x de la forme suivant $x = y + z$ où $\dot{y} = Ay$, $y(0) = x_0$, $\dot{z} = Az + Bu$ et $z(0) = 0$. On aura donc $x(T) = y(T) + z(T)$ et il suffit de trouver u telle que $z(T) = x_1 - y(T)$. Si la condition de Kalman est vérifiée cela est possible, sinon on peut toujours trouver des x_1 tels que $x_1 - y(T) \notin E$ où E a été défini au début de la démonstration du théorème 2.1. □

Chapitre 3

La méthode HUM

3.1 Rappel d'analyse fonctionnelle.

Soit H un espace de Hilbert, on note $(u|v)$ le produit hermitien dans H et $\|\cdot\|$ la norme associée. On dit qu'un opérateur A est non borné sur H s'il existe $\mathcal{D}$ un sous espace vectoriel de H et une application linéaire $A : \mathcal{D} \to H$. On note $\mathcal{D} = \mathcal{D}(A)$ et on l'appelle le domaine de A. Un opérateur non borné est donc la donnée d'un domaine $\mathcal{D}$ et d'une application linéaire de domaine $\mathcal{D}$. Il faudrait pour être rigoureux toujours noter $(A, \mathcal{D})$ un opérateur non borné Pour simplifier les écritures, on note simplement l'opérateur non borné par A. Néanmoins, avant de noter Ax, il faut s'assurer que $x \in \mathcal{D}(A)$.

Prenons quelques exemples, $H = L^2(\mathbb{R}^n)$, $A = \Delta = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_k^2}$, on peut définir plusieurs opérateurs non bornés avec les choix suivants, $\mathcal{D}_1 = \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, $\mathcal{D}_2 = H^2(\mathbb{R}^n)$, $\mathcal{D}_3 = \mathcal{C}_0^2(\mathbb{R}^n)$. Les propriétés d'un opérateur non borné dépendent fortement de son domaine. On rappelle quelques résultats dont on trouvera les preuves dans Brezis [1].

3.1.1 Opérateurs non bornés et problèmes d'évolution.

Définition 3.1 *(i) On dit que A est monotone si pour tout $v \in \mathcal{D}(A)$, $(Av|v) \geq 0$.*
(ii) On dit que A est maximal monotone si de plus $\mathrm{Im}(I + A) = H$.

Le point (ii) peut se récrire de la façon suivante.

$$\forall x \in H,\ \exists y \in \mathcal{D}(A),\ \text{tel que } y + Ay = x.$$

Pour illustrer le fait que les propriétés d'un opérateur non bornés dépendent de son domaine prenons l'exemple typique du laplacien $-\Delta$ de domaine $\mathcal{D}_2 = H^2(\mathbb{R}^n)$ est maximal monotone, mais $-\Delta$ de domaine $\mathcal{D}_1 = \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ ou $\mathcal{D}_3 = \mathcal{C}_0^2(\mathbb{R}^n)$ ne le sont pas.

Définition 3.2 *On dit qu'un opérateur non borné A est fermé si $\{(x, Ax) \in H \times H, x \in \mathcal{D}(A)\}$ est fermé dans $H \times H$. C'est-à-dire si une suite (x_n) de $\mathcal{D}(A)$ vérifie $x_n \to x$ dans H et $Ax_n \to y$ dans H alors, $x \in \mathcal{D}(A)$ et $y = Ax$.*

Attention on ne peut pas appliquer le théorème du graphe fermé dans ce cas si $\mathcal{D}(A) \neq H$.

Proposition 3.3 *Si A est maximal monotone alors*
(i) $\mathcal{D}(A)$ est dense dans H.
(ii) A est fermé.
(iii) Pour tout $\lambda > 0$, $I + \lambda A$ est bijectif de $\mathcal{D}(A)$ sur H et $(I + \lambda A)^{-1}$ est borné sur H et on a $\|(I + \lambda A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(H)} \leq 1$.

Théorème 3.4 *(Hille-Yoshida) Soit A un opérateur maximal monotone sur H alors pour tout $u_0 \in \mathcal{D}(A)$ il existe une unique fonction $u \in \mathcal{C}^1([0, +\infty[, H) \cap \mathcal{C}([0, +\infty[, \mathcal{D}(A))$ telle que*
$\dfrac{du}{dt} + Au = 0$ *sur* $[0, +\infty[$
$u(0) = u_0$
De plus $\|u(t)\| \leq \|u_0\|$ et $\|Au(t)\| = \|\dfrac{du(t)}{dt}\| \leq \|Au_0\|$ pour tout $t \geq 0$.

Nous rappelons le théorème de Riesz.

Théorème 3.5 *Soit H un espace de Hilbert, soit f une forme linéaire continue sur H alors il existe un unique élément $v \in H$ tel que pour tout $u \in H$ on ait $f(u) = (u|v)$. De plus on a $\|v\| = \|f\|_{H'}$.*

Soit A un opérateur non borné sur H. On suppose que $\mathcal{D}(A)$ est dense dans H. On va définir l'adjoint de A. Tout d'abord on définit le domaine suivant,

$$\mathcal{D}(A^*) = \{u \in H,\ \exists C > 0,\ \forall v \in \mathcal{D}(A),\ |(Av|u)| \leq C\|v\|\}. \tag{3.1.1}$$

Soit $u \in \mathcal{D}(A^*)$, l'application $G : \mathcal{D}(A) \to \mathbb{C}$ définie par $G(v) = (Av|u)$ est continue (en munissant $\mathcal{D}(A)$ de la topologie de H). Le domaine $\mathcal{D}(A)$ étant dense, on peut prolonger G à tout H d'une manière unique et par le théorème de Riesz, il existe $f \in H$ telle que $(Av|u) = (v|f)$. Par définition on note $f = A^*u$. A^* est un opérateur non borné de domaine $\mathcal{D}(A^*)$. On a donc pour tout $v \in \mathcal{D}(A)$ et tout $u \in \mathcal{D}(A^*)$ la formule $(Av|u) = (v|A^*u)$.

Définition 3.6 *Soit A un opérateur non borné à domaine dense, on dit que*

1. *A est symétrique si pour tout u, v dans $\mathcal{D}(A)$ on a $(Au|v) = (u|Av)$.*
2. *A est auto-adjoint si $\mathcal{D}(A^*) = \mathcal{D}(A)$ et pour tout $u \in \mathcal{D}(A)$, $Au = A^*u$.*

Bien sûr si A est auto-adjoint alors A est symétrique mais la réciproque n'est pas vraie. Par exemple $(\Delta, \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n))$ est symétrique mais n'est pas auto-adjoint car le domaine de $\mathcal{D}(\Delta^*)$ contient par exemple $\mathcal{C}_0^2(\mathbb{R}^n)$. Néanmoins nous avons le résultat suivant.

Proposition 3.7 *Soit A un opérateur maximal monotone symétrique alors A est auto-adjoint.*

Théorème 3.8 *Soit A un opérateur maximal monotone auto-adjoint sur H alors pour tout $u_0 \in H$ il existe une unique fonction $u \in \mathcal{C}([0, +\infty[, H) \cap \mathcal{C}(]0, +\infty[, \mathcal{D}(A)) \cap \mathcal{C}^1(]0, +\infty[, H)$ telle que*

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt} + Au = 0 & \text{sur }]0, +\infty[\\ u(0) = u_0 \end{cases} \tag{3.1.2}$$

De plus $\|u(t)\| \leq \|u_0\|$ et $\|\dfrac{du(t)}{dt}\| = \|Au(t)\| \leq \dfrac{1}{t}\|u_0\|$.

Théorème 3.9 *Soit A un opérateur maximal monotone auto-adjoint sur H et soit une fonction $f \in \mathcal{C}^1([0,T],H)\cap\mathcal{D}([0,T],\mathcal{D}(A))$ alors il existe une unique fonction $u \in \mathcal{C}^1([0,T],H)\cap \mathcal{C}([0,T],\mathcal{D}(A))$ telle que,*

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{du}{dt} + Au = f \quad \text{ sur }]0,+\infty[\\ u(0) = 0 \end{array}\right. \tag{3.1.3}$$

Si on note $S(t)u_0$ la solution de (3.1.2), on peut écrire la solution de (3.1.3) de la façon suivante, $u(t) = \displaystyle\int_0^t S(t-s)f(s)ds$.

3.1.2 Propriétés du laplacien sur un domaine borné.

La résolution des problèmes d'évolution dépend des propriétés de A, c'est à dire du problème stationnaire sous-jacent, rappelons les propriétés du laplacien.
Tout d'abord, rappelons la définition d'un ouvert à bord $\mathcal{C}^\infty$. On dit que Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^n$ à bord $\mathcal{C}^\infty$ si pour tout $x_0 \in \partial\Omega$ il existe un voisinage ouvert V de x_0 dans $\mathbb{R}^n$ et un difféomorphisme ψ, $\mathcal{C}^\infty$ de V sur un voisinage de $\psi(x_0) = 0$ tel que $\psi(V \cap \Omega) \subset \{x \in \mathbb{R}^n,\ x_n > 0\}$ et $\psi(V \setminus \Omega) \subset \{x \in \mathbb{R}^n,\ x_n \leq 0\}$.
Notons $\Delta = \dfrac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \cdots + \dfrac{\partial^2}{\partial x_n^2}$, défini sur le domaine $\mathcal{D}(\Delta) = H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$, Δ est un opérateur auto-adjoint sur $H = L^2(\Omega)$. On vérifie également que $-\Delta$ est maximal monotone et auto-adjoint. Pour tout $u,\ v \in \mathcal{D}(\Delta)$, $(-\Delta u|v) = \displaystyle\int_\Omega \sum_{j=1}^n \frac{\partial u}{\partial x_j}\frac{\partial \bar{v}}{\partial x_j} dx = (u|-\Delta v)$ d'où $(-\Delta u|u) = \displaystyle\int_\Omega \sum_{j=1}^n |\frac{\partial u}{\partial x_j}|^2 dx$. En particulier on peut appliquer les deux théorèmes 3.8 et 3.9.
Il existe une suite λ_k croissante, $0 < \lambda_0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \ldots$ et $e_k \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ telle que $\Delta e_k = -\lambda_k^2 e_k$ où $\|e_k\|_{L^2(\Omega)} = 1$ et la suite e_k forme une base hilbertienne de $L^2(\Omega)$. Avec cette décomposition spectrale nous pouvons écrire différemment la solution du problème d'évolution. Si $u_0 \in L^2(\Omega)$ on peut décomposer cette fonction sur la base hilbertienne (e_k), il existe donc une suite $a_k \in \mathbb{C}$ telle que $u_0 = \displaystyle\sum_{j\in\mathbb{N}} a_j e_j$. Il est facile de vérifier que $u(t,x) = \displaystyle\sum_{j\in\mathbb{N}} a_j e^{-t\lambda_j^2} e_j$ est solution du problème $\dfrac{du}{dt} - \Delta u = 0$. Nous pouvons écrire le semi-groupe $S(t)$ de la façon suivante, $S(t)u_0 = \displaystyle\sum_{j\in\mathbb{N}} a_j e^{-t\lambda_j^2} e_j$. Remarquons que si $(a_j)_{j\in\mathbb{N}} \in \ell^2$ alors $(a_j e^{-t\lambda_j^2}) \in \ell^2$ pour tout $t \geq 0$. Ceci permet de donner un sens à toutes les écritures utilisées.

3.1.3 Quelques principes d'analyse fonctionnelle.

Nous rappelons une version du théorème de Hahn-Banach.

Théorème 3.10 *Soit E un espace vectoriel normé sur $\mathbb{C}$. Nous noterons $\|\cdot\|_E$ la norme sur E. Soit F un sous-espace vectoriel de E. Soit $u : F \to \mathbb{C}$ une forme linéaire vérifiant,* *il existe $C_0 > 0$, telle que pour tout $x \in F$ $|u(x)| \leq C_0 \|x\|_E$ alors il existe $f : E \to \mathbb{C}$ une forme linéaire telle que $f(x) = u(x)$ pour tout $x \in F$ et $|f(x)| \leq C_0 \|x\|_E$ pour tout $x \in E$.*

Ce théorème est très utile pour résoudre une équation du type $Pu = f$. Sans entrer dans les détails, donnons quelques idées pour résoudre cette équation. Supposons que $f \in E$, E étant un espace à préciser. Notons E' le dual, $\langle \cdot | \cdot \rangle$ le crochet de dualité entre E et E' et ${}^tP$ l'opérateur vérifiant $\langle v | Pu \rangle = \langle {}^tPv | u \rangle$ pour tout $u \in E$ et tout $v \in E'$. Résoudre $Pu = f$ est équivalent à avoir pour tout $v \in E'$, $\langle v | Pu \rangle = \langle v | f \rangle$ c'est à dire en transposant P d'avoir pour tout $v \in E'$, $\langle {}^tPv | u \rangle = \langle v | f \rangle$.
Notons $F = \{ {}^tPv, \ v \in E' \}$ mais dans la pratique, on doit souvent prendre v dans un espace plus petit que E' pour que ${}^tPv$ ait un sens. Définissons une application $G : F \to \mathbb{C}$ telle que $Gw = \langle v, f \rangle$ où ${}^tPv = w$. Supposons que ${}^tP$ vérifie la propriété suivante,

$$\text{(3.1.4)} \qquad \text{il existe } C > 0, \text{ telle que, } C \| {}^tPv \|_{E'} \geq \|v\|_{E'} \text{ pour tout } v \in E'$$

Remarquons que G est bien défini car s'il existe v_1 et $v_2 \in E'$ telles que ${}^tPv_1 = {}^tPv_2 = w$, on a ${}^tP(v_1 - v_2) = 0$ et d'après (3.1.4) $v_1 = v_2$.
On a $|G(w)| = |\langle v, f \rangle \leq \|v\|_{E'} \|f\|_E \leq C \| {}^tPv \|_{E'} \|f\|_E \leq C \|w\|_{E'} \|f\|_E$. Donc G est continue sur F et par le théorème de Hahn-Banach 3.10 il existe une application linéaire G' qui prolonge G à tout E'. Si par exemple E est reflexif $G' \in E'' = E$ et on a pour tout $v \in E'$, $\langle v, f \rangle = \langle {}^tPv, G' \rangle$ et G' est la solution recherchée du problème $Pu = f$. Dans la pratique, il faut adapter la méthode décrite car P n'opère en générale pas de E dans E mais de E dans un autre espace et il n'est pas toujours évident de démontrer que cette formule $\langle v, f \rangle = \langle {}^tPv, G' \rangle$ vraie pour "beaucoup" de v implique que $PG' = f$. Mais le principe général reste et est le suivant pour résoudre une équation du type $Pu = f$ il faut chercher à démontrer une inégalité sur l'adjoint de P du type (3.1.4).

3.2 Problèmes de contrôle.

3.2.1 Introduction.

Soit Ω un ouvert borné à bord $\mathcal{C}^\infty$, soit ω un ouvert de Ω, soit $f \in \mathcal{C}^1([0, T_0], L^2(\Omega))$ et soit $u_0 \in L^2(\Omega)$. On a vu aux paragraphes précédents qu'on peut résoudre le problème suivant,

$$\text{(3.2.1)} \qquad \begin{cases} \dfrac{du}{dt} - \Delta u = f & \text{sur } [0, T_0] \times \Omega \\ u|_{[0,T] \times \partial\Omega} = 0 & \\ u(0, \cdot) = u_0 & \text{sur } \Omega \end{cases}$$

On rappelle que la solution de (3.2.1) est donnée par,

$$\text{(3.2.2)} \qquad u(t, \cdot) = e^{t\Delta} u_0 + \int_0^t e^{(t-s)\Delta} f(s, \cdot) ds$$

Le problème de contrôle qui va nous intéresser est de trouver f telle que $u(T)$, où T est un instant donné a priori, vérifie certaines propriétés que nous allons décrire plus loin. Comme dans le cas de la dimension finie, pour que le problème soit mathématiquement intéressant, nous allons ajouter une contrainte sur f. Nous allons demander que f ait son support sur $[0,T]\times\omega$. Ceci correspond à la situation où il n'est possible d'agir sur le système que sur une petite portion du domaine Ω. Dit autrement on est en présence d'un corps qu'il n'est possible de refroidir ou de chauffer que sur une petite partie. La question est, en utilisant le semi-groupe $S(t)=e^{t\Delta}$, étant donné $u_1\in L^2(\Omega)$ est-il possible de trouver f, vérifiant la contrainte de support telle que $u_1=S(T)u_0+\displaystyle\int_0^T S(T-s)f(s,\cdot)ds$. Il n'est pas possible de résoudre ce problème pour tout $u_1\in L^2(\Omega)$. En effet, une conséquence des théorèmes 3.8 et 3.9 est que $u(T)\in\mathcal{D}(\Delta)$. Pour l'équation de la chaleur, nous allons décrire quelques problèmes plus faibles.

3.2.2 Densité de l'image.

On suppose pour l'instant que $u_0=0$ et nous verrons par la suite que nous pouvons toujours nous ramener à ce cas.
On définit $S:\mathcal{C}([0,T],L^2(\omega))\to L^2(\Omega)$ telle que $Sf=\displaystyle\int_0^T e^{(T-s)\Delta}f(s,\cdot)ds$. La question est de savoir si l'image de S est dense dans $L^2(\Omega)$. Il est classique que $\operatorname{Im}S$ dense $\Leftrightarrow(\operatorname{Im}S)^\perp=\{0\}$. Soit $g\in(\operatorname{Im}S)^\perp$ on a

$$0=\int_\Omega u(T,x)\overline{g(x)}dx=\int_0^T\left(\int_\Omega\left[e^{(T-s)\Delta}f(s,\cdot)\right](x)\overline{g(x)}dx\right)ds. \tag{3.2.3}$$

Lemme 3.11 *Pour $t>0$, $e^{t\Delta}:L^2(\Omega)\to L^2(\Omega)$ est auto-adjoint.*

On a donc pour tout $u,v\in L^2(\Omega)$, $(e^{t\Delta}u|v)=(u|e^{t\Delta}v)$.
Démonstration.
Soit t fixé et $s\in]0,t[$, d'après le théorème 3.8, $e^{t\Delta}u\in\mathcal{D}(\Delta)$ pour tout $t>0$. Notons $h(s)=(e^{(t-s)\Delta}u|e^{s\Delta}v)-(e^{s\Delta}u|e^{(t-s)\Delta}v)$. On a $h(s)\in\mathcal{C}^1(]0,t[)$ car $e^{s\Delta}u$, $e^{s\Delta}v$, $e^{(t-s)\Delta}u$ et $e^{(t-s)\Delta}v$ sont dans $\mathcal{C}^1(]0,t[,L^2(\Omega))$ d'après le théorème 3.8 et on a,

$$\frac{dh}{ds}(s)=(-\Delta e^{(t-s)\Delta}u|e^{s\Delta}v)+(e^{(t-s)\Delta}u|e^{s\Delta}\Delta v)-(\Delta e^{s\Delta}u|e^{(t-s)\Delta}v)+(e^{s\Delta}u|e^{(t-s)\Delta}\Delta v)=0$$

car Δ est auto-adjoint. Or $h(t/2)=0$ donc $h=0$ et comme $h(s)\to(e^{t\Delta}u|v)-(u|e^{t\Delta}v)$ quand $s\to0$ on en déduit le lemme. $\square$

Comme f est à support dans $[0,T]\times\omega$ on peut écrire, en poursuivant le calcul (3.2.3)

$$0=\int_0^T\left(\int_\omega f(s,x)\overline{(e^{(T-s)\Delta}g)(x)}dx\right)ds. \tag{3.2.4}$$

Ceci n'est possible que si pour tout $s\in[0,T]$, $e^{(T-s)\Delta}g(x)=0$ pour $x\in\omega$. En posant $T-s=t\in[0,T]$ nous avons démontré la proposition suivante, puisque $v=e^{t\Delta}g$ est la solution du problème (3.2.5) avec la donnée g.

Proposition 3.12 *Soit v une solution du problème*

$$\left\{\begin{aligned}\frac{dv}{dt}-\Delta v = &\ 0 \ sur\ [0,T]\times\Omega\\ v|_{[0,T]\times\partial\Omega} = &\ 0\end{aligned}\right. \tag{3.2.5}$$

L'application S est d'image dense si et seulement si la propriété suivante est vraie, si v solution de (3.2.5) vérifie de plus $v|_{[0,T]\times\omega}=0$ alors $v=0$ sur $[0,T]\times\Omega$.

Cette proposition fait le lien entre le problème de densité de l'image avec un problème d'unicité. Remarquons que ce n'est pas un problème d'unicité concernant la condition initiale. Il s'agit d'un problème d'unicité pour un problème mal posé.
Nous avons supposé que $u_0=0$ mais par linéarité cela n'est pas une restriction. En effet la propriété de la proposition 3.12 est vérifiée, pour tout $\varepsilon>0$, on peut trouver f telle

$$||Sf-(u_1-e^{T\Delta}u_0)||_{L^2(\Omega)}<\varepsilon. \tag{3.2.6}$$

La solution du problème (3.2.1) est $u(T)=e^{T\Delta}u_0+\displaystyle\int_0^T e^{(T-s)\Delta}f(s,\cdot)ds=e^{T\Delta}u_0+Sf$ et d'après (3.2.6), $\|u(T)-u_1\|_{L^2(\Omega)}<\varepsilon$.

3.2.3 Contrôlabilité vers 0, généralités.

Ici on veut résoudre le problème 3.2.1 où $u_1=0$. Pour tout $u_0\in L^2(\Omega)$ on veut trouver $f\in\mathcal{C}^1([0,T],L^2(\omega))$ telle que

$$0=u(T,\cdot)=e^{T\Delta}u_0+\int_0^T\left[e^{(T-s)\Delta}f(s,\cdot)\right]ds. \tag{3.2.7}$$

Il s'agit donc de résoudre le problème $Sf=-e^{T\Delta}u_0$ en reprenant la notation de la partie 3.2.2. On va donc trouver suivant l'idée générale de la partie 3.1.3 calculer l'adjoint de ce problème.
Soit $g\in L^2(\Omega)$, on a d'après (3.2.7) et le lemme 3.11,

$$\begin{aligned}0&=\int_\Omega(e^{T\Delta}u_0)(x)\overline{g(x)}dx+\int_\Omega\int_0^T\left[e^{(T-s)\Delta}f(s,\cdot)\right](x)ds\overline{g(x)}dx\\ &=\int_\Omega u_0(x)\overline{(e^{T\Delta}g(x))}dx+\int_0^T\int_\omega f(s,x)\overline{(e^{(T-s)\Delta}g)(x)}dxds\end{aligned} \tag{3.2.8}$$

Définissons $F=\{e^{(T-s)\Delta}g_{|[0,T]\times\omega}\in L^2([0,T]\times\omega),\ \text{où } g\in L^2(\Omega)\}$ et soit $K:F\to\mathbb{C}$ définie pour $w=e^{(T-s)\Delta}g_{|\omega}$ par $Kw=-\int_\Omega(e^{T\Delta}g)(x)\overline{u_0(x)}dx$. Supposons qu'il existe $C>0$ telle que pour tout $g\in L^2(\Omega)\}$ et tout $u_0\in L^2(\Omega)$ on a,

$$|\int_\Omega(e^{T\Delta}g)(x)\overline{u_0(x)}dx|\le C\|e^{(T-s)\Delta}g_{|[0,T]\times\omega}\|_{L^2([0,T]\times\omega)}\|u_0\|_{L^2(\Omega)} \tag{3.2.9}$$

alors par le théorème de Hahn-Banach 3.10 on peut prolonger K en une forme linéaire continue sur $L^2([0,T]\times\omega)$ et par le théorème de Riesz 3.5, il existe $f\in L^2([0,T]\times\omega)$ telle que

$$Kw=-\int_\Omega(e^{T\Delta}g)(x)\overline{u_0(x)}dx=\int_0^T\int_\omega(e^{(T-s)\Delta}g)(x)\overline{f(s,x)}dxds. \tag{3.2.10}$$

La formule (3.2.10) est la conjuguée de (3.2.8), il suffit de prouver (3.2.9) pour résoudre le problème.
Il peut être plus pratique de mettre l'inégalité (3.2.9) sous la forme équivalente suivante, soit v la solution du problème,

$$\begin{cases}\dfrac{\partial v}{\partial t}-\Delta v &= 0\\ v_{|t=0} &= g\in L^2(\Omega)\\ v\big|_{[0,T]\times\partial\Omega} &= 0\end{cases} \tag{3.2.11}$$

il existe $C>0$ telle que pour tout $g\in L^2(\Omega)$ la solution de (3.2.11) vérifie,

$$\|v(T,\cdot)\|^2_{L^2(\Omega)}\le C^2\int_0^T\|v(t,\cdot)\|^2_{L^2(\omega)}dt \tag{3.2.12}$$

En effet (3.2.9) est équivalente à (3.2.12), il suffit de remarquer que $v(t,\cdot)=e^{t\Delta}g$, de prendre dans (3.2.9) $u_0=e^{T\Delta}g$ et de poser $t=T-s$ dans (3.2.12) pour obtenir (3.2.9).

Théorème 3.13 *Supposons qu'il existe $C>0$ telle que pour tout $g\in L^2(\Omega)$,*

$$\|e^{T\Delta}g\|_{L^2(\Omega)}\le C\|e^{(T-s)\Delta}g_{|[0,T]\times\omega}\|_{L^2([0,T]\times\omega)} \tag{3.2.13}$$

alors l'équation de la chaleur est contrôlable à 0 et pour tout $u_0\in L^2(\Omega)$ il existe une solution $f\in L^2([0,T]\times\omega)$ au problème vérifiant $Sf=-e^{T\Delta}u_0$ et

$$\int_0^T\|f(t,\cdot)\|^2_{L^2(\omega)}dt\le C^2\|u_0\|^2_{L^2(\Omega)}. \tag{3.2.14}$$

Réciproquement si pour tout $u_0\in L^2(\Omega)$ il existe $f\in L^2([0,T]\times\omega)$ telle que $Sf=-e^{T\Delta}u_0$ et vérifiant (3.2.14) *alors l'inégalité* (3.2.13) *est vraie avec la même constante C.*

Remarque 3.14 *Nous n'avons pas défini le problème* (3.2.1) *pour $f\in L^2([0,T]\times\omega)$ mais il n'est pas difficile de faire agir le semi-groupe $S(t)$ sur de telle f. En effet, on peut écrire $f(t,\cdot)=\sum_{k=0}^{\infty}a_k(t)e_k$ où les a_k vérifient $\int_0^T\sum_{k=0}^{\infty}|a_k(t)|^2dt<+\infty$.*
Le terme $\int_0^T e^{(T-s)\Delta}f(s,\cdot)ds=\sum_{k=0}^{\infty}\int_0^T e^{-(T-s)\lambda_k^2}a_k(s)ds\ e_k$ et comme

$$\Big|\int_0^T e^{-(T-s)\lambda_k^2}a_k(s)ds\Big|^2\le\frac{1}{2\lambda_k^2}\int_0^T|a_k(t)|^2dt,$$

on obtient facilement que $\int_0^T e^{(T-s)\Delta}f(s,\cdot)ds\in L^2(\Omega)$.

Démonstration du théorème 3.13.
Clairement (3.2.13) implique (3.2.9). Montrons l'estimation sur f. D'après l'inégalité (3.2.9), la norme de K est majorée par $C\|u_0\|_{L^2(\Omega)}$ et le théorème de Riesz 3.5 implique que la norme de f est majorée par la même quantité.
Pour la réciproque, prenons pour $g \in L^2(\Omega)$ fixé, $u_0 = e^{T\Delta}g$. Il existe f telle que $Sf = -e^{T\Delta}u_0$ et vérifiant (3.2.14), de l'égalité (3.2.8), on obtient,

$$\begin{aligned}\|e^{T\Delta}g\|^2_{L^2(\Omega)} \leq & |\int_0^T \int_\omega f(s,x)(e^{(T-s)\Delta}g)(x)dxds| \\ \leq & \|f\|_{L^2([0,T]\times\omega)}\|(e^{(T-s)\Delta}g)_{|[0,T]\times\omega}\|_{L^2([0,T]\times\omega)} \\ \leq & C\|e^{T\Delta}g\|_{L^2(\Omega)}\|(e^{(T-s)\Delta}g)_{|[0,T]\times\omega}\|_{L^2([0,T]\times\omega)}.\end{aligned}$$

Ce qui implique (3.2.13). □

3.2.4 Contrôlabilité des λ premières fréquences.

Reprenons le problème (3.2.1) avec une donnée initiale $u(0,\cdot) = u_0 \in L^2(\Omega)$ et on cherche un contrôle $f \in L^2([0,T]\times\omega)$ tel que $u(T,\cdot)$ soit orthogonal aux fonctions propres e_k pour tous les k tels que $\lambda_k \leq \lambda$. On peut récrire cette condition $\int_\Omega u(T,x)\overline{g(x)}dx = 0$ pour tout g s'écrivant $g = \sum_{\lambda_k\leq\lambda} c_k e_k$ où les $c_k \in \mathbb{C}$. D'après (3.2.2) on a,

$$u(T,\cdot) = e^{T\Delta}u_0 + \int_0^T [e^{(T-s)\Delta}f(s,\cdot)]ds \tag{3.2.15}$$

on obtient (3.2.8) pour les fonctions $g = \sum_{\lambda_k\leq\lambda} c_k e_k$.
On définit $F = \{e^{(T-s)\Delta}g_{|[0,T]\times\omega)} \in L^2([0,T]\times\omega),\ \text{pour } g = \sum_{\lambda_k\leq\lambda} c_k e_k\}$ et $K : F \to \mathbb{C}$ définie pour $w = e^{(T-s)\Delta}g_{|[0,T]\times\omega)}$ par $Kw = -\int_\Omega (e^{T\Delta}g)(x)\overline{u_0(x)}dx$. Remarquons qu'il s'agit de la même application K que dans la partie précédente, mais nous avons pris ici un ensemble F plus petit. Ceci est cohérent car si on est capable de contrôler vers 0, alors $u(T,\cdot)$ est orthogonale à tous les e_k. Supposons qu'on ait (3.2.9) alors de nouveau par les théorèmes de Hahn-Banach 3.10 et de Riesz 3.5, il existe $f \in L^2([0,T]\times\omega)$ vérifiant (3.2.10). Ici aussi l'inégalité (3.2.9) est impliquée par (3.2.13) mais les g décrivent l'ensemble F ci-dessus. Cet ensemble étant de dimension finie toutes les normes sont équivalentes [1]. L'inégalité (3.2.13) est donc évidente, mais ce raisonnement ne donne pas d'estimation de la constante C en fonction de λ. C'est ce qui va être précisé dans la suite.

1. Nous n'avons pas démontré que le terme de droite de l'inégalité est une norme mais cela résultera de la suite. Cette affirmation n'est peut-être pas très visible car nous démontrerons le contrôle ce qui d'après le théorème 3.13 implique l'inégalité d'observabilité. Voir Saut et Scheurer [12] pour une démonstration directe de l'unicité des solutions de l'équation de la chaleur si la solution est nulle sur un ouvert, ce qui démontre que le terme de droite de inégalité est une norme.

Proposition 3.15 *Supposons qu'il existe $C>0$ telle que pour tout $\lambda \geq 1$ et toute fonction*

$$g(x)=\sum_{\lambda_k\leq\lambda} b_k e_k(x) \tag{3.2.16}$$

on a

$$\|g\|_{L^2(\Omega)} \leq Ce^{C\lambda}\|g_{|\omega}\|_{L^2(\omega)} \tag{3.2.17}$$

alors il existe C' telles que pour tout $T>0$, pour tout $\lambda \geq 1$ et toute fonction g vérifiant (3.2.16) *on a*

$$\|e^{T\Delta}g\|^2_{L^2(\Omega)} \leq C'\frac{e^{C'\lambda}}{T}\int_0^T\int_\omega |e^{(T-s)\Delta}g(x)|^2dxds \tag{3.2.18}$$

Remarquons que (3.2.18) est équivalente à, il existe $C'>0$ telle que pour toute suite b_k

$$\sum_{\lambda_k\leq\lambda}|b_k|^2e^{-2\lambda_k^2T} = \|\sum_{\lambda_k\leq\lambda} b_k e^{-\lambda_k^2T}e_k\|^2_{L^2(\Omega)} \leq C'\frac{e^{C'\lambda}}{T}\int_0^T\int_\omega |\sum_{\lambda_k\leq\lambda} e^{-\lambda_k^2(T-s)}b_ke_k(x)|^2dxds$$

Démonstration.
On applique l'inégalité (3.2.17) à $\sum_{\lambda_k\leq\lambda} b_k e^{-\lambda_k^2(T-s)}e_k$ où $s\in[0,T]$ est un paramètre. On a

$$B=\|\sum_{\lambda_k\leq\lambda} b_k e^{-\lambda_k^2(T-s)}e_k\|^2_{L^2(\Omega)} \leq C^2e^{2C\lambda}\|\sum_{\lambda_k\leq\lambda} b_k e^{-\lambda_k^2(T-s)}e_{k|\omega}\|^2_{L^2(\omega)}. \tag{3.2.19}$$

Or $B=\sum_{\lambda_k\leq\lambda}|b_k|^2e^{-2\lambda_k^2(T-s)} \geq \sum_{\lambda_k\leq\lambda}|b_k|^2e^{-2\lambda_k^2T}$. En utilisant cette minoration dans (3.2.19) et en intégrant s entre 0 et T, on obtient,

$$T\|\sum_{\lambda_k\leq\lambda} b_k e^{-\lambda_k^2T}e_k\|^2_{L^2(\Omega)} \leq C^2e^{2C\lambda}\int_0^T\|\sum_{\lambda_k\leq\lambda} b_k e^{-\lambda_k^2(T-s)}e_{k|\omega}\|^2_{L^2(\omega)}. \tag{3.2.20}$$

Ce qui donne (3.2.18) [2]. □

Théorème 3.16 *Soit $T_0>0$, supposons qu'il existe $C>0$ telle que pour tout $\lambda\geq 1$ et toute fonction*

$$g(x)=\sum_{\lambda_k\leq\lambda} b_k e_k(x) \tag{3.2.21}$$

on a

$$\|g\|_{L^2(\Omega)} \leq Ce^{C\lambda}\|g_{|\omega}\|_{L^2(\omega)} \tag{3.2.22}$$

2. On peut même préciser la dépendance de C' en fonction de C mais nous n'utiliserons pas cette information dans la suite.

alors pour tout $T \in]0, T_0]$, *il existe* $C' > 0$ *et* $C'' > 0$ *telles que pour tout* $u_0 \in L^2(\Omega)$, *il existe* $f \in L^2([0,T] \times \omega)$ *telle que la solution* u *du problème,*

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{du}{dt} - \Delta u = f \ \text{sur } [0,T] \times \Omega \\ u|_{t=0} = u_0 \\ u|_{[0,T]\times\partial\Omega} = 0 \end{array}\right. \tag{3.2.23}$$

vérifie que $u(T,\cdot)$ *est orthogonale à* e_k *pour tout* k *tel que* $\lambda_k \leq \lambda$, *ou d'une façon équivalente qu'il existe une suite* $b_k \in \ell^2$ *telle que* $u(T,\cdot) = \sum_{\lambda_k > \lambda} b_k e_k$.

De plus,

$$\|f\|_{L^2([0,T]\times\omega)} \leq C' \frac{e^{C'\lambda}}{\sqrt{T}} \|u_0\|_{L^2(\Omega)} \tag{3.2.24}$$

$$\|u(t,\cdot)\|_{L^2(\Omega)} \leq C'' e^{C''\lambda} \|u_0\|_{L^2(\Omega)} \tag{3.2.25}$$

Démonstration.
D'après la proposition 3.15 et (3.2.18), on a

$$|Kw| \leq \|u_0\|_{L^2(\Omega)} \|e^{T\Delta} g\|_{L^2(\Omega)} \leq C e^{C\lambda} \|u_0\|_{L^2(\Omega)} \|w\|_{L^2([0,T]\times\omega)}.$$

L'application des théorèmes de Hahn-Banach 3.10 et de Riesz 3.5 donne (3.2.24).
Démontrons (3.2.25). D'après (3.2.2) on a, pour $t \in [0,T]$,

$$\begin{aligned} \|u(t,\cdot)\|_{L^2(\Omega)} \leq & \|u_0\|_{L^2(\Omega)} + \int_0^t \|f(s,\cdot)\|_{L^2(\omega)} ds \\ \leq & \|u_0\|_{L^2(\Omega)} + C' e^{C'\lambda} \|u_0\|_{L^2(\Omega)}. \end{aligned}$$

Ce qui donne le résultat. □

3.2.5 Contrôlabilité vers 0 des solutions de l'équation de la chaleur.

Tout d'abord remarquons que si $u_0 = \sum_{\lambda_k > \lambda} a_k e_k$ alors

$$\|e^{t\Delta} u_0\|_{L^2(\Omega)} = \|\sum_{\lambda_k>\lambda} a_k e^{-t\lambda_k^2} e_k\|_{L^2(\Omega)} = \left(\sum_{\lambda_k>\lambda} |a_k|^2 e^{-2t\lambda_k^2}\right)^{1/2}$$

$$\leq e^{-t\lambda^2} \left(\sum_{\lambda_k>\lambda} |a_k|^2\right)^{1/2} \leq e^{-t\lambda^2} \|u_0\|_{L^2(\Omega)}. \tag{3.2.26}$$

L'idée est, pour contrôler u_0, de contrôler les premières fréquences pendant un certain temps, puis de ne rien faire ce qui fait diminuner l'énergie de la solution d'après (3.2.26) puis de recommencer pour une autre plage de fréquences. Il faut veiller à ce que la somme de la suite des temps converge et que l'énergie décroisse pour que le contrôle f soit d'énergie finie.

Plus précisément, posons $A = \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k\alpha}$ où $\alpha > 0$ est un paramètre qui sera fixé plus loin. On pose $T_n = \frac{T}{A}\sum_{k=1}^{n} 2^{-k\alpha}$ de sorte que T_n est croissante et converge vers T. On définit $T'_n = (T_n + T_{n+1})/2$. On a $T_{n+1} - T_n = \frac{T}{A}2^{-(n+1)\alpha}$ et $T'_n - T_n = T_{n+1} - T'_n = \frac{T}{A2^{1+\alpha}}2^{-n\alpha}$.
On va construire un contrôle par récurrence sur n en contrôlant les fréquences inférieures à 2^n entre T_n et T'_n puis nous laisserons le système évoluer librement entre T'_n et T_{n+1}. Notons pour simplifier les écritures $u_n(\cdot) = u(T_n, \cdot)$. On posera pour $t \in [T_n, T_{n+1}]$, $u(t, \cdot) = u_n(t - T_n, \cdot)$ où u_n est la solution construite ci-dessous. D'après le théorème 3.16, il existe $f_n \in L^2([0, T'_n - T_n] \times \omega)$ telle que

$$\|f_n\|_{L^2([0,T'_n-T_n]\times\omega)} \leq C' 2^{n\alpha/2} e^{C'2^n} \|u_n\|_{L^2(\Omega)} \leq C_1 e^{C_1 2^n} \|u_n\|_{L^2(\Omega)} \tag{3.2.27}$$

en prenant C_1 suffisamment grand et

$$\|u(T'_n, \cdot)\|_{L^2(\Omega)} \leq C_2 e^{C_2 2^n} \|u_n\|_{L^2(\Omega)} \tag{3.2.28}$$

En prenant f nulle sur $[T'_n, T_{n+1}]$ on a d'après (3.2.26) et comme $u_{n+1} = e^{(T_{n+1}-T'_n)\Delta} u(T'_n, \cdot)$

$$\begin{aligned} \|u_{n+1}\|_{L^2(\Omega)} \leq & e^{-(T_{n+1}-T'_n)2^{2n}} \|u(T'_n, \cdot)\|_{L^2(\Omega)} \leq C_3 e^{-C_4 2^{-n\alpha+2n}} e^{C_2 2^n} \|u_n\|_{L^2(\Omega)} \\ \leq & C_5 e^{-C_6 2^{n(2-\alpha)}} \|u_n\|_{L^2(\Omega)}. \end{aligned} \tag{3.2.29}$$

En effet si on suppose que $0 < \alpha < 1$ il existe alors $C_6 > 0$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $-C_4 2^{-n\alpha+2n} + C_2 2^n \leq -C_6 2^{n(2-\alpha)}$.
Par récurrence, il existe $C_7 > 0$ et $C_8 > 0$ telles que pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$\|u_n\|_{L^2(\Omega)} \leq C_7 e^{-C_8 2^{n(2-\alpha)}} \|u_0\|_{L^2(\Omega)} \tag{3.2.30}$$

D'après (3.2.25) il existe $C_9 > 0, C_{10} > 0$ telle que pour tout $t \in [T_n, T_{n+1}]$ on a

$$\|u(t, \cdot)\|_{L^2(\Omega)} \leq C_9 e^{C_9 2^n} \|u_n\|_{L^2(\Omega)} \leq C_{10} e^{-C_6 2^{n(2-\alpha)} + C_9 2^n} \|u_0\|_{L^2(\Omega)}. \tag{3.2.31}$$

En particulier $u(t\cdot) \to 0$ dans $L^2(\Omega)$ quand $t \to T$, car d'après la définition de T_n et comme $t \in [T_n, T_{n+1}]$, on vérifie que $T - t \sim 2^{-n\alpha}$.
D'après (3.2.27) et (3.2.30) il existe $C_{11} > 0, C_{12} > 0, C_{13} > 0$ telles que,

$$\begin{aligned} \|f_n\|_{L^2([0,T'_n-T_n]\times\omega)} \leq & C_1 e^{C_1 2^n} \|u_n\|_{L^2(\Omega)} \\ \leq & C_{11} e^{C_1 2^n} e^{C_8 2^{n(2-\alpha)}} \|u_0\|_{L^2(\Omega)} \\ \leq & C_{12} e^{-C_{13} 2^{n(2-\alpha)}} \|u_0\|_{L^2(\Omega)}. \end{aligned}$$

Le contrôle sur $[0,T]$ est donné par $f(t,x)=\sum_{n=0}^{\infty}1_{[T_n,T'_n]}(t)f_n(t-T_n,x)$. Il existe $C_{14}>0$ telle que,

$$\begin{aligned}\|f\|_{L^2([0,T]\times\omega)}\leq&\sum_{n=0}^{\infty}\|f_n\|_{L^2([0,T'_n-T_n]\times\omega)}\\ \leq&C_{12}\sum_{n=0}^{\infty}e^{-C_{13}2^{n(2-\alpha)}}\|u_0\|_{L^2(\Omega)}\\ \leq&C_{14}\|u_0\|_{L^2(\Omega)}.\end{aligned}$$

Nous avons donc démontré le théorème suivant.

Théorème 3.17 *Supposons que l'inégalité* (3.2.22) *soit vraie alors, pour tout* $T>0$, *il existe* $C>0$ *telle que pour tout* $u_0\in L^2(\Omega)$ *il existe* $f\in L^2([0,T]\times\omega)$ *telle que la solution* u *du problème suivant,*

$$\left\{\begin{array}{l}\dfrac{du}{dt}-\Delta u=f\ \textit{sur}\ [0,T]\times\Omega\\ u|_{t=0}=u_0\\ u|_{[0,T]\times\partial\Omega}=0\end{array}\right.\tag{3.2.32}$$

vérifie $u(T,\cdot)=0$ *de plus*

$$\|f\|_{L^2([0,T]\times\omega)}\leq C\|u_0\|_{L^2(\Omega)}\tag{3.2.33}$$

3.3 Inégalité d'interpolation et inégalité sur les sommes des premières fonctions propres.

Soit $T>0$, on note $X_T=[0,T]\times\Omega$. Soit $0<T_0<T_1<T_2<T_3$, on note $X_{T_0T_1}=[T_0,T_1]\times\Omega$. Soit ω un ouvert de Ω.

Théorème 3.18 *Il existe* $\alpha\in]0,1[$, *il existe* $C>0$ *tels que pour toute solution* $F\in H^1(X_{T_3})$ *du problème*

$$\left\{\begin{array}{ll}(\partial_t^2+\Delta)F=0 & \textit{dans}\ X_{T_3}\\ F(0,x)=0 & \textit{pour}\ x\in\Omega\\ F_{|\partial X_{T_3}}=0 & \textit{où}\ \partial X_{T_3}=[0,T_3]\times\partial\Omega\end{array}\right.\tag{3.3.1}$$

vérifie

$$\|F\|_{H^1(X_{T_0T_1})}\leq C\|(\partial_tF)(0,\cdot)\|^{\alpha}_{L^2(\omega)}\|F\|^{1-\alpha}_{H^1(X_{T_2})}\tag{3.3.2}$$

La preuve de ce théorème sera l'objet du chapitre 4.

Théorème 3.19 *Il existe* $C>0$ *telle que pour tout* $\lambda\geq 1$ *et toute fonction*

$$g(x)=\sum_{\lambda_k\leq\lambda}c_ke_k(x)$$

on a

$$\|g\|_{L^2(\Omega)}\leq Ce^{C\lambda}\|g_{|\omega}\|_{L^2(\omega)}\tag{3.3.3}$$

Remarque 3.20 *On peut donc appliquer les théorèmes 3.16 et 3.17. On a donc prouvé la controlabilité vers 0 si nous démontrons le théorème 3.18.*

Démonstration du théorème 3.19.
Rappelons les notations, on a $-\Delta e_k = \lambda_k^2 e_k$ pour $k \in \mathbb{N}$ et soit $g = \sum_{\lambda_k \leq \lambda} c_k e_k$. Posons $F(t,\cdot) = \sum_{\lambda_k \leq \lambda} \frac{\mathrm{sh}(\lambda_k t)}{\lambda_k} c_k e_k$. On vérifie que $(\partial_t^2 + \Delta)F = 0$, $F(0,\cdot) = 0$, $F_{|\partial X_T} = 0$ et $\partial_t F(t,\cdot) = \sum_{\lambda_k \leq \lambda} \mathrm{ch}(\lambda_k t) c_k e_k$ d'où, $\partial_t F(0,\cdot) = g$. En appliquant l'inégalité (3.3.2), on a,

$$\|F\|_{H^1(X_{T_0T_1})} \leq C\|g\|^{\alpha}_{L^2(\omega)} \|F\|^{1-\alpha}_{H^1(X_{T_2})} \tag{3.3.4}$$

Nous avons $\|F\|^2_{H^1(X_{T_2})} = A + B + C$ où

$$A = \|F\|^2_{L^2(X_{T_2})} = \int_{X_{T_2}} \Big(\sum_{\lambda_k \leq \lambda} c_k \frac{\mathrm{sh}(\lambda_k t)}{\lambda_k} e_k(x)\Big)^2 dxdt$$
$$B = \|\partial_t F\|^2_{L^2(X_{T_2})} = \int_{X_{T_2}} \Big(\sum_{\lambda_k \leq \lambda} c_k \,\mathrm{ch}(\lambda_k t) e_k(x)\Big)^2 dxdt$$
$$C = \sum_{j=1}^{d} \|\partial_{x_j} F\|^2_{L^2(X_{T_2})} = \sum_{j=1}^{d} \int_{X_{T_2}} \Big(\sum_{\lambda_k \leq \lambda} c_k \frac{\mathrm{sh}(\lambda_k t)}{\lambda_k} \partial_{x_j} e_k(x)\Big)^2 dxdt.$$

On a (les constantes D ci-dessous changerons éventuellement d'une ligne à l'autre mais peuvent être choisies indépendantes de λ)

$$A = \sum_{\lambda_k \leq \lambda} \int_0^T \frac{\mathrm{sh}^2(\lambda_k t)}{\lambda_k^2} \|e_k\|^2_{L^2(\Omega)} |c_k|^2 dt$$

Or il existe pour $t \leq T_2$, $D > 0$ telle que $|\frac{\mathrm{sh}(\lambda t)}{\lambda}|^2 \leq De^{D\lambda}$ donc

$$A \leq De^{D\lambda} \sum_{\lambda_k \leq \lambda} |c_k|^2 = De^{D\lambda} \|g\|^2_{L^2(\Omega)}. \tag{3.3.5}$$

De même,

$$B = \sum_{\lambda_k \leq \lambda} \int_0^T (\mathrm{ch}(\lambda_k t))^2 dt |c_k|^2$$

et il existe pour $t \leq T_2$, $D > 0$ telle que $|\,\mathrm{ch}(\lambda t)|^2 \leq De^{D\lambda}$ donc

$$B \leq De^{D\lambda} \sum_{\lambda_k \leq \lambda} |c_k|^2 = De^{D\lambda} \|g\|^2_{L^2(\Omega)}. \tag{3.3.6}$$

On a aussi,

$$C = \sum_{j=1}^{d} \sum_{\lambda_k \leq \lambda} \sum_{\lambda_\ell \leq \lambda} \int_0^T \int_\Omega c_k \overline{c_l} \frac{\mathrm{sh}(\lambda_k t)}{\lambda_k} \frac{\mathrm{sh}(\lambda_\ell t)}{\lambda_\ell} (\partial_{x_j} e_k) \overline{(\partial_{x_j} e_\ell)} dxdt. \tag{3.3.7}$$

Or comme e_k est nulle sur le bord de Ω, on a

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{d}\int_{\Omega}(\partial_{x_j}e_k)\overline{(\partial_{x_j}e_\ell)}dx &= -\sum_{j=1}^{d}\int_{\Omega}(\partial_{x_j}^2 e_k)\overline{e_\ell}dx = -\int_{\Omega}(\Delta e_k)\overline{e_\ell}dx = \int_{\Omega}\lambda_k^2 e_k\overline{e_\ell}dx \\ &= \delta_{k\ell}\lambda_k^2. \qquad (3.3.8)\end{aligned}$$

Donc d'après (3.3.7) et (3.3.8) et comme pour $t \leq T_2$ il existe D telle que $|\operatorname{sh}(\lambda t)|^2 \leq De^{D\lambda}$,

$$C = \sum_{\lambda_k \leq \lambda}|c_k|^2\int_0^T \operatorname{sh}^2(\lambda_k t)dt \leq De^{D\lambda}\|g\|_{L^2(\Omega)}^2. \qquad (3.3.9)$$

On a d'après (3.3.5), (3.3.6) et (3.3.9)

$$\|F\|_{H^1(X_{T_2})}^2 \leq De^{D\lambda}\|g\|_{L^2(\Omega)}^2 \qquad (3.3.10)$$

Minorons tout d'abord $\|F\|_{H^1(X_{T_0,T_1})}$ par $\|F\|_{L^2(X_{T_0,T_1})}$. On a

$$\|F\|_{L^2(X_{T_0,T_1})}^2 = \sum_{\lambda_k \leq \lambda}|c_k|^2\int_{T_0}^{T_1}\frac{\operatorname{sh}^2(\lambda_k t)}{\lambda_k^2}dt.$$

Or pour $t \geq 0$, $t \leq \operatorname{sh} t$ donc $t^2 \leq \dfrac{\operatorname{sh}^2(\lambda_k t)}{\lambda_k^2}$.
On a

$$\|F\|_{L^2(X_{T_0,T_1})}^2 \geq \sum_{\lambda_k \leq \lambda}|c_k|^2\int_{T_0}^{T_1} t^2 dt = \frac{T_1^3 - T_0^3}{3}\|g\|_{L^2(\Omega)}^2$$

et il existe une constante $D' > 0$ telle que

$$\|F\|_{H^1(X_{T_0,T_1})}^2 \geq D'\|g\|_{L^2(\Omega)}^2 \qquad (3.3.11)$$

La preuve de (3.3.3) résulte de (3.3.4), (3.3.10) et de (3.3.11). □

3.4 Exercices.

Exercice 1.

Soit un ouvert Ω à bord $\mathcal{C}^\infty$. Soit $V(x)$ une fonction $\mathcal{C}^\infty$ à valeurs complexes. On note $u_\lambda \in \mathcal{C}^\infty(\overline{\Omega})$ où $\lambda \in \mathbb{C}$, une solution non nulle de

$$(-\Delta + V(x) - \lambda)u_\lambda = 0 \text{ vérifiant } u_\lambda = 0 \text{ sur } \partial\Omega. \qquad (3.4.1)$$

On note $(u|v) = \int_\Omega u(x)\overline{v(x)}dx$. On suppose que $\operatorname{Im} V \geq 0$ et $\{x \in \Omega,\ \operatorname{Im} V > 0\} \neq 0$.

1) En considérant $\operatorname{Im}((-\Delta + V)u_\lambda|u_\lambda)$, montrer que $\operatorname{Im}\lambda > 0$.

2) On note $v_\lambda = e^{s\omega}u_\lambda$ où $\omega^2 = \lambda$, $\operatorname{Re}\omega > 0$ et $\operatorname{Im}\omega > 0$. Montrer que

$$(-\partial_s^2 - \Delta + V)v_\lambda = 0. \tag{3.4.2}$$

3) On note $W_\delta = \{x \in \Omega,\ \operatorname{Im} V(x) > \delta\}$ où $\delta > 0$ et on admettra que $W_\delta \neq \emptyset$ si δ est assez petit.
On rappelle qu'il existe $C_0 > 0$, $\mu \in]0,1[$ tels que pour tout v_λ solution de (3.4.2)

$$\|v_\lambda\|_{L^2(\Omega\times]-1,1[)} \le C_0\|v_\lambda\|^{\mu}_{L^2(W_\delta\times]-1,1[)}\|v_\lambda\|^{1-\mu}_{L^2(\Omega\times]-2,2[)}.$$

En déduire qu'il existe $C_1 > 0$ telle que pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$, $\operatorname{Im}\lambda > 0$,

$$\|u_\lambda\|^2_{L^2(\Omega)} \le C_1 e^{C_1|\lambda|^{1/2}}\int_{W_\delta}|u_\lambda|^2 dx.$$

4) En reprenant le calcul de la question 1), montrer qu'il existe $C_2 > 0$ telle que pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$, $\operatorname{Im}\lambda > 0$ associé à u_λ vérifiant (3.4.1), on a $\operatorname{Im}\lambda \ge \dfrac{1}{C_2}e^{-C_2|\lambda|^{1/2}}$.

Exercice 2.

Soit un ouvert Ω connexe à bord $\mathcal{C}^\infty$. Soit $a(x)$ une fonction $\mathcal{C}^\infty$. On suppose $a(x) \ge 0$ pour tout $x \in \Omega$. On note $u_\lambda \in \mathcal{C}^\infty(\overline{\Omega})$ où $\lambda \in \mathbb{C}$, une solution non nulle de

$$(-\Delta + \lambda a + \lambda^2)u_\lambda = 0 \text{ vérifiant } u_\lambda = 0 \text{ sur } \partial\Omega. \tag{3.4.3}$$

On note $(u|v) = \int_\Omega u(x)\overline{v(x)}dx$ et $\|u\|^2$ la norme associée.

On suppose que $\{x \in \Omega,\ a(x) > 0\} \neq \emptyset$. On note $W_\delta = \{x \in \Omega,\ a(x) > \delta\}$ où $\delta > 0$ et on admettra que $W_\delta \neq \emptyset$, ce qui est le cas si δ est assez petit.

On rappelle que pour tout u_λ solution de (3.4.3), si $u_\lambda = 0$ sur un ouvert $\omega \subset \Omega$ alors $u_\lambda = 0$ dans Ω.

1) Calculer de deux façons $((-\Delta + \lambda a + \lambda^2)u_\lambda|u_\lambda)$.

2) En considérant $\operatorname{Im}((-\Delta+\lambda a+\lambda^2)u_\lambda|u_\lambda)$ et en supposant $\operatorname{Im}\lambda \neq 0$, montrer que $\operatorname{Re}\lambda \le 0$. Montrer de plus, qu'on ne peut avoir $\operatorname{Re}\lambda = 0$.

3) On suppose $\operatorname{Im}\lambda = 0$, montrer en considérant $\operatorname{Re}((-\Delta + \lambda a + \lambda^2)u_\lambda|u_\lambda)$ que $\operatorname{Re}\lambda \le 0$. De plus montrer qu'on ne peut avoir $\operatorname{Re}\lambda = 0$.

4) On note $v_\lambda = e^{is\lambda}u_\lambda$. Montrer que v_λ vérifie,

$$(\partial_s^2 + \Delta - ia\partial_s)v_\lambda = 0. \tag{3.4.4}$$

On rappelle qu'il existe $C_0 > 0$, $\mu \in]0,1[$ tels que pour toute solution v_λ de (3.4.4), on a

(3.4.5) $$\|v_\lambda\|_{L^2(\Omega\times]-1,1[)} \le C_0 \|v_\lambda\|^{\mu}_{L^2(W_\delta\times]-1,1[)} \|v_\lambda\|^{1-\mu}_{L^2(\Omega\times]-2,2[)}.$$

5) Déduire de (3.4.5) qu'il existe $C_1 > 0$ telle que pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$,

$$\|u_\lambda\|^2_{L^2(\Omega)} \le C_1 e^{C_1|\operatorname{Im}\lambda|} \int_{W_\delta} |u_\lambda|^2 dx.$$

6) En reprenant le calcul de la question 2), montrer qu'il existe $C_2 > 0$ telle que pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$, $|\operatorname{Im}\lambda| \ge 1$ associé à u_λ vérifiant (3.4.3), on a $\operatorname{Re}\lambda \le -\dfrac{1}{C_2} e^{-C_2|\operatorname{Im}\lambda|}$.

Exercice 3.

Soit un ouvert Ω à bord $\mathcal{C}^\infty$ de $\mathbb{R}^n$. Soit $a(x)$ une fonction $\mathcal{C}^\infty$ à valeurs réelles. On note $u_\lambda \in \mathcal{C}^\infty(\overline{\Omega})$ où $\lambda \in \mathbb{C}$, une solution non nulle de

(3.4.6) $$(-\Delta + 2ia(x)\partial_{x_1} + \lambda)u_\lambda = 0 \text{ vérifiant } u_\lambda = 0 \text{ sur } \partial\Omega.$$

On note $(u|v) = \int_\Omega u(x)\overline{v(x)}dx$ et $\|u\|^2 = (u|u)$.

On suppose $\forall x \in \Omega,\ |a(x)| \le 1$ et $\partial_{x_1} a(x) \ge 0$.

On rappelle que si $u, v \in \mathcal{C}^\infty(\overline{\Omega})$ vérifiant $u = v = 0$ sur $\partial\Omega$ alors $(\partial_{x_j} u|v) = -(u|\partial_{x_j} v)$ pour tout $j = 1, \cdots, n$.

On note $W_\delta = \{x \in \Omega,\ \partial_{x_1} a(x) > \delta\}$ où $\delta > 0$ et on admettra que $W_\delta \ne \emptyset$ si δ est assez petit.

On rappelle que si u_λ vérifie (3.4.6) et si $u_\lambda = 0$ sur W_δ alors $u_\lambda = 0$ sur Ω.

1) En intégrant par partie, calculer $2\operatorname{Im} i(a\partial_{x_1} u|u)$ puis en considérant $\operatorname{Im}((-\Delta + 2ia(x)\partial_{x_1} + \lambda)u_\lambda|u_\lambda)$, montrer que $\operatorname{Im}\lambda \ge 0$.

2) Montrer qu'on ne peut avoir $\operatorname{Im}\lambda = 0$.

3) En considérant $\operatorname{Re}((-\Delta + 2ia(x)\partial_{x_1} + \lambda)u_\lambda|u_\lambda)$, montrer que $\operatorname{Re}\lambda \le 1$.

4) On note $v_\lambda = e^{is\omega}u_\lambda$ où $\omega^2 = \lambda$, $\operatorname{Re}\omega > 0$ et $\operatorname{Im}\omega > 0$. Montrer que

(3.4.7) $$(-\partial_s^2 - \Delta + 2ia(x)\partial_{x_1})v_\lambda = 0.$$

5) On rappelle qu'il existe $C_0 > 0$, $\mu \in]0,1[$ tels que pour tout v_λ solution de (3.4.7)

$$\|v_\lambda\|_{L^2(\Omega\times]-1,1[)} \le C_0 \|v_\lambda\|^{\mu}_{L^2(W_\delta\times]-1,1[)} \|v_\lambda\|^{1-\mu}_{L^2(\Omega\times]-2,2[)}.$$

En déduire qu'il existe $C_1 > 0$ telle que pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$, $\operatorname{Im}\lambda > 0$,

$$\|u_\lambda\|^2_{L^2(\Omega)} \le C_1 e^{C_1|\lambda|^{1/2}} \int_{W_\delta} |u_\lambda|^2 dx.$$

6) En reprenant le calcul de la question 1), montrer qu'il existe $C_2 > 0$ telle que pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$, $\operatorname{Im} \lambda > 0$ associé à u_λ vérifiant (3.4.6), on a $\operatorname{Im} \lambda \geq \dfrac{1}{C_2} e^{-C_2 |\lambda|^{1/2}}$.

Chapitre 4

Inégalités de Carleman et d'interpolation

Nous allons d'abord démontrer le théorème 3.18 localement et dans chaque zone nous allons nous placer dans des coordonnées locales adaptées. Pour rendre les énoncés plus clairs, nous allons nous placer en variables $y \in \mathbb{R}^d$ et nous préciserons plus loin le lien entre les variables (t,x) du théorème 3.18 et les variables y. Dans chaque zone l'inégalité d'interpolation est une conséquence d'une inégalité de Carleman. Les inégalités de Carleman ont historiquement d'abord été démontrées pour prouver des résultats d'unicité pour des problèmes mal posés. Mais en fait on peut aussi obtenir avec ces inégalités des résultats plus quantitatifs comme les inégalités d'interpolation. En effet l'inégalité (3.3.2) implique en particulier que si $\partial_t F(0,.) = 0$ sur ω alors $F \equiv 0$, ce qui est un résultat d'unicité pour un problème mal posé. Bien sûr le résultat d'unicité peut être obtenu plus simplement directement sans passer par (3.3.2) en utilisant les inégalités de Carleman.

Nous allons dans la suite considérer des opérateurs plus généraux que le laplacien. Cette généralisation est d'une part nécessaire puisque, dans la preuve, nous faisons des changements de variables dont le but est de faire les calculs avec un bord droit, et d'autre part les résultats de contrôle sont également vrais dans un cadre plus général, c'est-à-dire, on peut remplacer Δ par un opérateur d'ordre 2 elliptique, positif, auto-adjoint sans différence notable dans les preuves des chapitres précédents.

Précisons les hypothèses et les notations utilisées dans ce chapitre.

Soit Y un domaine borné (à bord $\mathcal{C}^\infty$ quand nous considérerons Y comme un domaine à bord) de $\mathbb{R}^d$, soit $a_{jk} \in \mathcal{C}^\infty(\overline{Y})$, à valeurs réelles, nous supposons que $a_{jk}(y) = a_{kj}(y)$ pour tout $y \in Y$. On suppose qu'il existe $C > 0$ telle que pour tout $y \in Y$, et tout $\xi \in \mathbb{R}^d$, $\displaystyle\sum_{j,k=1}^{d} a_{jk}(y)\xi_j\xi_k \geq C|\xi|^2$ où on a noté $|\cdot|$ la norme euclidienne sur $\mathbb{R}^d$.

Pour $y_0 \in Y$ et $r > 0$ nous notons $B(y_0, r) = \{y \in \mathbb{R}^d,\ |y_0 - y| < r\}$. On pose $\psi(y) = |y_0 - y|^2$ et pour $\beta > 0$, $\varphi(y) = e^{-\beta\psi(y)}/\beta$.

On note $Pu(y) = \displaystyle\sum_{j,k=1}^{d} a_{jk}(y)D_jD_ku$ où $D_j = \dfrac{1}{i}\dfrac{\partial}{\partial y_j}$ et nous notons $D = (D_1, \cdots, D_d)$.

4.1 Estimation à l'intérieur.

4.1.1 Inégalité de Carleman

Théorème 4.1 *Soit $r_0 > 0$ tel que $B(y_0, 3r_0) \subset Y$, pour tout $r \in]0, r_0]$, il existe $\beta > 0$, $C > 0$, $\gamma_0 > 0$ tels que pour tout $u \in \mathcal{C}_0^\infty(B(y_0, 3r))$, vérifiant* $\operatorname{supp} u \subset \{y \in \mathbb{R}^d,\ r/2 \leq |y_0 - y| \leq 3r\}$ *et pour tout $\gamma > \gamma_0$ on a,*

$$\gamma^3 \|e^{\gamma\varphi} u\|^2_{L^2(Y)} + \gamma \|e^{\gamma\varphi} Du\|^2_{L^2(Y)} \leq C \|e^{\gamma\varphi} Pu\|^2_{L^2(Y)} \tag{4.1.1}$$

Démonstration.
Dans la suite, pour simplifier les écritures nous noterons, $\|\cdot\|^2_{L^2(Y)} = \|\cdot\|^2$, $(u|v) = \int_Y u\bar{v}dy$ le produit scalaire de $L^2(Y)$, $\frac{\partial \varphi}{\partial y_j} = \varphi'_j$ et $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y_j \partial y_k} = \varphi''_{jk}$. On notera C une constante strictement positive ne dépendant pas de γ, de β et de ε (paramètre que nous introduirons plus loin). Nous noterons $K_{\varepsilon,\beta}$ une constante indépendante de γ mais dépendant de ε et de β. Évidemment ces constantes peuvent changer d'une ligne à l'autre.
On pose $v = e^{\gamma\varphi} u$. On a $D_j u = e^{-\gamma\varphi}(D_j v + i\gamma\varphi'_j v)$. On obtient donc

$$\gamma^3 \|e^{\gamma\varphi} u\|^2 + \gamma \|e^{\gamma\varphi} Du\|^2 \leq C(\gamma^3 \|v\|^2 + \gamma \|\ Dv\|^2) \tag{4.1.2}$$

On a aussi

$$D_j D_k u = e^{-\gamma\varphi}(D_j D_k v + i\gamma\varphi'_j D_k v + i\gamma\varphi'_k D_j v - \gamma^2 \varphi'_j \varphi'_k + \gamma\varphi''_{jk} v). \tag{4.1.3}$$

Pour démontrer l'inégalité (4.1.1) il suffit de démontrer l'inégalité suivante,

$$\gamma^3 \|v\|^2 + \gamma \|\ Dv\|^2 \leq C \| \sum_{k,j=1}^{d} a_{jk}(y) D_j D_k v + 2i a_{jk}(y) \varphi'_j D_k v - \gamma^2 a_{jk}(y) \varphi'_j \varphi'_k v \|^2 \tag{4.1.4}$$

En effet le terme $\|\gamma\varphi''_{jk} v\|^2$ peut être absorbé de droite à gauche en prenant γ suffisamment grand par rapport à C (c'est un "reste", voir (4.1.9)).
Comment démontrer (4.1.4) ?
Le principe est le suivant soit $Q = A + iB$ où A et B sont des opérateurs formellement auto-adjoint. Nous avons

$$\|Qv\|^2 = \|Av\|^2 + \|Bv\|^2 + 2\operatorname{Re}(Av|iBv) \tag{4.1.5}$$

or

$$2\operatorname{Re}(Av|iBv) = (Av|iBv) + (iBv|Av) = (-iBAv|v) + (iABv|v) = i([A, B]v|v) \tag{4.1.6}$$

où $[A, B]$ est le commutateur de A et B. Si $i[A, B]$ est positif alors on peut démontrer une inégalité. La méthode pour démontrer (4.1.4) va donc consister à dans un premier temps calculer le commutateur, puis à étudier sa positivité. En fait il n'est pas nécessaire que le commutateur soit positif partout mais seulement aux endroits où A et B ne sont pas elliptiques. On peut en effet utiliser les termes $\|Av\|$ et $\|Bv\|$ de (4.1.5) pour estimer les erreurs (notées "reste" voir (4.1.9))).

Dans la suite, nous noterons

$$Av = \sum_{k,j=1}^{d} a_{jk}(y)D_jD_kv - \gamma^2 a_{jk}(y)\varphi'_j\varphi'_k v \tag{4.1.7}$$

$$Bv = 2\sum_{k,j=1}^{d} \gamma a_{jk}(y)\varphi'_j D_k v \tag{4.1.8}$$

et nous appellerons un "reste" un terme majoré de la façon suivante

$$\exists C > 0,\ \forall\varepsilon,\ \forall\beta,\ \exists K_{\varepsilon,\beta} \text{ tels que} \tag{4.1.9}$$
$$|\text{"reste"}| \leq C\varepsilon(\|Av\|^2 + \|Bv\|^2) + K_{\varepsilon,\beta}(\gamma^2\|v\|^2 + \|Dv\|^2) + C(\gamma^3\|e^{-\frac{3\beta\psi}{2}}v\|^2 + \gamma\|e^{-\frac{3\beta\psi}{2}}Dv\|^2).$$

Chacun des termes appelés "restes" sera absorbé, à la fin du calcul par des termes que l'on domine. Les termes $\|Au\|$ et $\|Bu\|$ apparaissent dans 4.1.5. Il suffira de prendre ε assez petit pour que $C\varepsilon \leq \frac{1}{2}$ pour absorber ces termes. Les termes $\gamma^2\|v\|^2$ et $\|Dv\|^2$ apparaissent dans l'inégalité 4.1.1. Il suffira de prendre $\gamma \geq \gamma_0$ où $\gamma_0 \geq 2K_{\varepsilon,\beta}$ pour absorber ces termes. Pour les termes $\gamma^3\|e^{-\frac{3\beta\psi}{2}}v\|^2$ et $\|e^{-\frac{3\beta\psi}{2}}v\|^2$, la preuve que nous allons donner permet de majorer ces mêmes termes multipliés par la constantes β apparaissant dans le poids ψ. Nous pourrons donc absorber ces termes si on prend β assez grand. Ces opérations seront faites précisément à la fin du calcul.
Nous allons calculer le terme $2\operatorname{Re}(Av|iBv)$ en faisant des intégrations par partie. Le but étant de faire passer, dans le terme $(Av|iBv)$, à gauche les dérivées se trouvant à droite (i.e. dans Bv) et inversement à droite les dérivées se trouvant à gauche (i.e. dans A). Cela permet d'avoir une formule du type $(Av|iBv) = -(iBv|Av) +$ "termes importants" $+$ "reste". La formule d'intégration par partie que nous utiliserons est la suivante, $(D_jw_1|w_2) = (w_1|D_jw_2)$ car les fonctions w_1 et w_2 seront toujours à support compact, il n'y a donc pas de termes de bord.

<u>Calcul de $2\operatorname{Re}(a_{jk}D_jD_kv|2ia_{\ell p}\gamma\varphi'_\ell D_pv)$.</u>

$$\begin{aligned} T_0 = (a_{jk}D_jD_kv|2ia_{\ell p}\gamma\varphi'_\ell D_pv) &= (D_kv|D_j(2a_{jk}a_{\ell p}i\gamma\varphi'_\ell D_pv)) \\ &= (D_kv|2a_{jk}a_{\ell p}i\gamma\varphi'_\ell D_jD_pv)) \\ &\quad + (D_kv|2\frac{\partial a_{jk}}{\partial y_j}a_{\ell p}\gamma\varphi'_\ell D_pv)) \\ &\quad + (D_kv|2a_{jk}\frac{\partial a_{\ell p}}{\partial y_j}\gamma\varphi'_\ell D_pv)) \\ &\quad + (D_kv|2a_{jk}a_{\ell p}\gamma\varphi''_{\ell j}D_pv)) \\ &= T_1 + T_2 + T_3 + T_4. \end{aligned} \tag{4.1.10}$$

Or on a

$$\varphi = \frac{e^{-\beta\psi}}{\beta},\ \varphi'_j = -\psi'_je^{-\beta\psi} \text{ et } \varphi''_{jk} = \beta\psi'_j\psi'_ke^{-\beta\psi} - \psi''_{jk}e^{-\beta\psi} \tag{4.1.11}$$

donc

$$|T_2| + |T_3| \leq C\gamma \|e^{-\frac{\beta\psi}{2}} Dv\|^2 \leq |\text{“reste”}|. \tag{4.1.12}$$

D'après (4.1.11)

$$T_4 = (D_k v | 2a_{jk} a_{\ell p} \gamma \beta \psi'_j \psi'_\ell e^{-\beta\psi} D_p v) + (D_k v | 2a_{jk} a_{\ell p} \gamma (-\psi''_{j\ell}) e^{-\beta\psi} D_p v) = T_5 + T_6. \tag{4.1.13}$$

Or

$$|T_6| \leq C\gamma \|e^{-\frac{\beta\psi}{2}} Dv\|^2 \leq |\text{“reste”}| \tag{4.1.14}$$

donc

$$T_4 = 2\gamma\beta(\psi'_j a_{jk} D_k v | a_{\ell p} \psi'_\ell e^{-\beta\psi} D_p v) + \text{“reste”}. \tag{4.1.15}$$

Le terme T_1 est analogue à T_0. On obtient de même,

$$\begin{aligned} T_1 = (D_p(a_{jk} a_{\ell p} \varphi'_\ell D_k v) | 2\gamma i D_j v) =& (a_{jk} a_{\ell p} \varphi'_\ell D_p D_k v | 2\gamma i D_j v) \\ &+ (-i \frac{\partial a_{jk}}{\partial y_p} a_{\ell p} \varphi'_\ell D_k v | 2\gamma i D_j v) \\ &+ (-i a_{jk} \frac{\partial a_{\ell p}}{\partial y_p} \varphi'_\ell D_k v | 2\gamma i D_j v) \\ &+ (-i a_{jk} a_{\ell p} \varphi''_{\ell p} D_k v | 2\gamma i D_j v) \\ =& T_7 + T_8 + T_9 + T_{10}. \end{aligned} \tag{4.1.16}$$

Les termes T_8 et T_9 sont analogues aux termes T_2 et T_3 ci-dessus, on a,

$$|T_8| + |T_9| \leq C\gamma \|e^{-\frac{\beta\psi}{2}} Dv\|^2 \leq |\text{“reste”}|. \tag{4.1.17}$$

Le terme T_{10} se traite comme T_4 et on a de même,

$$T_{10} = -2\gamma\beta(a_{jk} a_{\ell p} \psi'_\ell \psi'_p e^{-\beta\psi} D_k v | D_j v) + \text{“reste”}. \tag{4.1.18}$$

Le terme T_7 se traite aussi comme T_0, on a

$$\begin{aligned} T_7 = (D_p v | D_k(2\gamma a_{jk} a_{\ell p} \varphi'_\ell i D_j v) =& -(2i a_{\ell p} \gamma \varphi'_\ell D_p v | a_{jk} D_k D_j v) \\ &+ (D_p v | 2 \frac{\partial a_{jk}}{\partial y_k} a_{\ell p} \varphi'_\ell \gamma D_j v) \\ &+ (D_p v | 2a_{jk} \frac{\partial a_{\ell p}}{\partial y_k} \varphi'_\ell \gamma D_j v) \\ &+ (D_p v | 2a_{jk} a_{\ell p} \varphi''_{k\ell} \gamma D_j v) \\ =& T_{11} + T_{12} + T_{13} + T_{14}. \end{aligned} \tag{4.1.19}$$

Les termes T_{12} et T_{13} sont analogues aux termes T_2 et T_3 ci-dessus, on a,

$$|T_{12}| + |T_{13}| \leq C\gamma \|e^{-\frac{\beta\psi}{2}} Dv\|^2 \leq |\text{“reste”}|. \tag{4.1.20}$$

Le terme T_{14} se traite comme T_4 et on a de même,

$$T_{14} = 2\gamma\beta(a_{jk}a_{\ell p}\psi'_\ell\psi'_k e^{-\beta\psi} D_p v|D_j v) + \text{“reste”}. \tag{4.1.21}$$

D'après les égalités (4.1.10), (4.1.12), (4.1.16), (4.1.17) et (4.1.19) on a,

$$T_0 = T_4 + T_{10} + T_{11} + T_{14} + \text{“reste”} \tag{4.1.22}$$

et d'après (4.1.15), (4.1.18), (4.1.19) et (4.1.21), on a

$$\begin{aligned}(a_{jk}D_jD_kv|2ia_{\ell p}\gamma\varphi'_\ell D_p v) = &- (2ia_{\ell p}\gamma\varphi'_\ell D_p v|a_{jk}D_kD_jv)\\ &+ 2\gamma\beta(\psi'_j a_{jk}D_kv|a_{\ell p}\psi'_\ell e^{-\beta\psi}D_pv)\\ &- 2\gamma\beta(a_{jk}a_{\ell p}\psi'_\ell\psi'_p e^{-\beta\psi}D_kv|D_jv)\\ &+ 2\gamma\beta(a_{jk}a_{\ell p}\psi'_\ell\psi'_k e^{-\beta\psi}D_pv|D_jv) + \text{“reste”}.\end{aligned}$$

On a donc en tenant compte de la symétrie de (a_{jk})

$$\begin{aligned}\sum_{jk\ell p} 2\,\mathrm{Re}(a_{jk}D_jD_kv|2ia_{\ell p}\gamma\varphi'_\ell D_pv) =&4\gamma\beta\|e^{-\frac{\beta\psi}{2}}\sum_{jk}a_{jk}\psi'_jD_kv\|^2\\ &- 2\gamma\beta\sum_{jk}((\sum_{\ell p}a_{\ell p}\psi'_\ell\psi'_p)e^{-\beta\psi}a_{jk}D_kv|D_jv) + \text{“reste”}.\end{aligned} \tag{4.1.23}$$

<u>Calcul de $2\,\mathrm{Re}(-\gamma^2a_{jk}\varphi'_j\varphi'_kv|2ia_{\ell p}\gamma\varphi'_\ell D_pv)$.</u>
On a,

$$\begin{aligned}S_0 = (-\gamma^2a_{jk}\varphi'_j\varphi'_kv|2ia_{\ell p}\gamma\varphi'_\ell D_pv) =&2\gamma^3(iD_p(a_{jk}a_{\ell p}\varphi'_j\varphi'_k\varphi'_\ell v)|v)\\ =&(2ia_{\ell p}\gamma\varphi'_\ell D_pv|\gamma^2a_{jk}\varphi'_j\varphi'_kv)\\ &+ 2\gamma^3(\frac{\partial a_{jk}}{\partial y_p}a_{\ell p}\varphi'_j\varphi'_k\varphi'_\ell v|v)\\ &+ 2\gamma^3(\frac{\partial a_{\ell p}}{\partial y_p}a_{jk}\varphi'_j\varphi'_k\varphi'_\ell v|v)\\ &+ 2\gamma^3(a_{jk}a_{\ell p}\varphi''_{jp}\varphi'_k\varphi'_\ell v|v)\\ &+ 2\gamma^3(a_{jk}a_{\ell p}\varphi'_j\varphi''_{kp}\varphi'_\ell v|v)\\ &+ 2\gamma^3(a_{jk}a_{\ell p}\varphi'_j\varphi'_k\varphi''_{\ell p}v|v)\\ =&S_1 + S_2 + S_3 + S_4 + S_5 + S_6.\end{aligned} \tag{4.1.24}$$

D'après (4.1.11), on a

$$|S_2| + |S_3| \leq C\gamma^3(|\psi'_j\psi'_k\psi'_\ell e^{-3\beta\psi}v|\ |\ |v|) \leq C\gamma^3\|e^{-\frac{3\beta\psi}{2}}v\|^2 \leq |\text{“reste”}| \tag{4.1.25}$$

Les termes S_4, S_5 et S_6 sont analogues, traitons précisément S_4, on a d'après (4.1.11)

$$S_4 = 2\beta\gamma^3(a_{jk}a_{\ell p}\psi'_j\psi'_p\psi'_k\psi'_\ell e^{-3\beta\psi}v|v) - 2\gamma^3(a_{jk}a_{\ell p}\psi''_{jp}\psi'_k\psi'_\ell e^{-3\beta\psi}v|v). \tag{4.1.26}$$

Or

$$|\gamma^3(a_{jk}a_{\ell p}\psi''_{jp}\psi'_k\psi'_\ell e^{-3\beta\psi}v|v)| \leq C\gamma^3\|e^{-\frac{3\beta\psi}{2}}v\|^2 \leq |\text{“reste”}|. \tag{4.1.27}$$

Le même calcul pour S_5 et S_6 donne le même terme principal et un “reste”. On obtient finalement,

$$\sum_{jk\ell p}(S_4+S_5+S_6) = 6\beta\gamma^3\|e^{-\frac{3\beta\psi}{2}}Hv\|^2 + \text{“reste”} \tag{4.1.28}$$

où $H = \sum_{jk} a_{jk}\psi'_j\psi'_k$.

Comme $S_1 = -\overline{S_0}$, on a d'après (4.1.24), (4.1.25) et (4.1.28)

$$2\sum_{jk\ell p}\operatorname{Re}(-\gamma^2 a_{jk}\varphi'_j\varphi'_k v|2ia_{\ell p}\gamma\varphi'_\ell D_p v) = 6\beta\gamma^3\|e^{-\frac{3\beta\psi}{2}}Hv\|^2 + \text{“reste”}. \tag{4.1.29}$$

D'après (4.1.23) et (4.1.29), on a,

$$\begin{aligned} 2\operatorname{Re}(Av|iBv) + |\text{“reste”}| \geq & 4\gamma\beta\|e^{-\frac{\beta\psi}{2}}\sum_{jk}a_{jk}\psi'_j D_k v\|^2 \\ & -2\gamma\beta\sum_{jk}(e^{-\beta\psi}Ha_{jk}D_k v|D_j v) + 6\beta\gamma^3\|e^{-\frac{3\beta\psi}{2}}Hv\|^2. \end{aligned} \tag{4.1.30}$$

Pour obtenir l'inégalité (4.1.4), il faut en particulier dominer le terme en Dv et supprimer le terme $-2\gamma\beta\sum_{jk}(e^{-\beta\psi}Ha_{jk}D_k v|D_j v)$ de (4.1.30). Pour cela calculons ce terme dans le but de faire apparaître le terme Av. Nous avons,

$$\begin{aligned} U_0 = 2\gamma\beta(a_{jk}e^{-\beta\psi}HD_k v|D_j v) =& 2\gamma\beta(D_j(a_{jk}e^{-\beta\psi}HD_k v)|v) \\ =& 2\gamma\beta(a_{jk}e^{-\beta\psi}HD_jD_k v|v) \\ & + 2\gamma\beta(-i\frac{\partial a_{jk}}{\partial y_j}e^{-\beta\psi}HD_k v|v) \\ & + 2\gamma\beta(-ia_{jk}e^{-\beta\psi}\frac{\partial H}{\partial y_j}D_k v|v) \\ & + 2\gamma\beta^2(ia_{jk}e^{-\beta\psi}\psi'_j HD_k v|v) \\ =& U_1+U_2+U_3+U_4. \end{aligned} \tag{4.1.31}$$

Or

$$|U_2|+|U_3|+|U_4| \leq \gamma K_\beta\|v\|\|Dv\| \leq K_\beta(\gamma^2\|v\|^2+\|Dv\|^2) \leq |\text{“reste”}| \tag{4.1.32}$$

D'après (4.1.7), on a

$$\sum_{jk}a_{jk}D_jD_k = A + \sum_{jk}\gamma^2 a_{jk}\varphi'_j\varphi'_k \tag{4.1.33}$$

donc,

$$2\gamma\beta(e^{-\beta\psi}HAv|v) + 2\gamma^3\beta(He^{-\beta\psi}\sum_{jk}\gamma^2 a_{jk}\varphi_j'\varphi_k' v|v) = U_5 + U_6. \tag{4.1.34}$$

Or on a pour tout $\varepsilon > 0$,

$$|U_5| \leq \gamma K_\beta \|Av\|\|v\| \leq \varepsilon\|Av\|^2 + K_{\beta\varepsilon}\gamma^2\|v\|^2 \leq |\text{“reste”}|. \tag{4.1.35}$$

Comme $\sum_{jk} a_{jk}\varphi_j'\varphi_k' = \sum_{jk} a_{jk}\psi_j'\psi_k' e^{-2\beta\psi} = He^{-2\beta\psi}$, on a d'après (4.1.31), (4.1.33) et (4.1.34),

$$2\gamma\beta\sum_{jk}(a_{jk}e^{-\beta\psi}HD_k v|D_j v) = 2\gamma^3\beta\|e^{-\frac{3\beta\psi}{2}}Hv\|^2 + \text{“reste”}. \tag{4.1.36}$$

Donc d'après (4.1.30), on a

$$2\,\mathrm{Re}(Av|iBv) + |\text{“reste”}| \geq 4\gamma\beta\|e^{-\frac{\beta\psi}{2}}\sum_{jk} a_{jk}\psi_j' D_k v\|^2 + 4\beta\gamma^3\|e^{-\frac{3\beta\psi}{2}}Hv\|^2. \tag{4.1.37}$$

D'après l'ellipticité de (a_{jk}), on a $\sum_{jk} a_{jk}(y)D_k v(y)\overline{D_j v(y)} \geq C|Dv(y)|^2$, donc

$$\gamma\beta\sum_{jk}(a_{jk}e^{-\beta\psi}HD_k v|D_j v) \geq C\gamma\beta\|e^{-\frac{\beta\psi}{2}}\sqrt{H}Dv\|^2. \tag{4.1.38}$$

D'après (4.1.36), (4.1.37) et (4.1.38), on a

$$2\,\mathrm{Re}(Av|iBv) + |\text{“reste”}| \geq \beta\gamma^3\|e^{-\frac{3\beta\psi}{2}}Hv\|^2 + C\gamma\beta\|e^{-\frac{\beta\psi}{2}}\sqrt{H}Dv\|^2. \tag{4.1.39}$$

D'après l'hypothèse, le support de v est dans $\{y \in \mathbb{R}^d,\ r/2 \leq |y - y_0| \leq 3r\}$, sur ce domaine $\nabla\psi \neq 0$ et par ellipticité de (a_{jk}), H est minorée et on peut l'enlever dans (4.1.39) quitte à changer la constante C. On fixe maintenant ε de sorte que, dans le terme de “reste” (4.1.9) la quantité $C\varepsilon \leq 1/2$. On a donc d'après (4.1.39) et la définition du “reste”, avec une constante K_β qui ne dépend que de β, ε étant maintenant fixé,

$$\begin{aligned}\|Av\|^2 + \|Bv\|^2 + 2\,\mathrm{Re}(Av|iBv) \geq{}& 1/2(\|Av\|^2 + \|Bv\|^2)\\ &- K_\beta(\gamma^2\|v\|^2 + \|Dv\|^2) - C_1(\gamma^3\|e^{-\frac{3\beta\psi}{2}}v\|^2 + \gamma\|e^{-\frac{\beta\psi}{2}}v\|^2)\\ &+ C_2\beta\gamma^3\|e^{-\frac{3\beta\psi}{2}}v\|^2 + C_2\beta\gamma\|e^{-\frac{\beta\psi}{2}}Dv\|^2\end{aligned} \tag{4.1.40}$$

où C_1 et C_2 sont des constantes indépendantes de β. Prenons β suffisamment grand de sorte que $C_2\beta \geq 2C_1$, on peut alors absorder le terme $C_1(\gamma^3\|e^{-\frac{3\beta\psi}{2}}v\|^2 + \gamma\|e^{-\frac{\beta\psi}{2}}v\|^2)$ par le terme $C_2\beta\gamma^3\|e^{-\frac{3\beta\psi}{2}}v\|^2 + C_2\beta\gamma\|e^{-\frac{\beta\psi}{2}}Dv\|^2$. On fixe maintenant β. On peut donc supprimer les termes $e^{-\frac{\beta\psi}{2}}$ et $e^{-\frac{3\beta\psi}{2}}$ de l'inégalité (4.1.40), ces termes étant maintenant minorés. On obtient donc, pour une constante $K > 0$

$$\|Av\|^2 + \|Bv\|^2 + 2\,\mathrm{Re}(Av|iBv) \geq -K(\gamma^2\|v\|^2 + \|Dv\|^2) + C(\gamma^3\|v\|^2 + \gamma\|Dv\|^2). \tag{4.1.41}$$

Choisissons γ_0 tel que $C\gamma_0 \geq 2K$, on a pour tout $\gamma \geq \gamma_0$

$$\|Av\|^2 + \|Bv\|^2 + 2\,\mathrm{Re}(Av|iBv) \geq (C/2)(\gamma^3\|v\|^2 + \gamma\|Dv\|^2). \tag{4.1.42}$$

Ce qui démontre (4.1.1) d'après (4.1.4), les définitions de A, B et le calcul de $\|Av + iBv\|^2$. $\square$

Remarque 4.2 *Nous n'avons pas utilisé ici le terme $\|Bv\|^2$ du "reste". Il n'était donc pas nécessaire de le mettre mais d'une part il n'est pas gênant et d'autre part dans d'autres cas il est absolument nécessaire de le mettre pour dominer certains termes. Aussi nous avons préféré le mettre ici pour indiquer la fléxibilité de la méthode.*

Remarque 4.3 *Il n'est pas très difficile de remarquer que la même preuve que celle donnée ici est valable si on suppose seulement que les coefficients a_{jk} sont des fonctions Lipschitziennes (voir les majorations des termes T_2, T_3 (voir* (4.1.10) *et* (4.1.12)*)* , *T_8, T_9 (voir* (4.1.16) *et* (4.1.17)*), T_{12}, T_{13} (voir* (4.1.19) *et* (4.1.20)*), S_2, S_3 (voir* (4.1.24) *et* (4.1.25)*), et U_2, U_3 (voir* (4.1.31) *et*(4.1.32)*)).*

Remarque 4.4 *Nous avons fait la preuve pour une fonction ψ particulière mais en reprenant la démonstration on vérifie que la seule hypothèse utilisée est que $\nabla\psi \neq 0$ sur le support de u.*

4.1.2 Inégalité d'interpolation

Théorème 4.5 *Soit $r_0 > 0$ tel que $B(y_0, 3r_0) \subset Y$, pour tout $r \in]0, r_0]$, il existe $C > 0$ et $\mu \in]0, 1[$ tels que pour tout $u \in \mathcal{C}^\infty(Y)$ on a*

$$\|u\|_{H^1(B(y_0,2r))} \leq C(\|u\|_{H^1(B(y_0,r))} + \|Pu\|_{L^2(B(y_0,3r))})^\mu \|u\|^{1-\mu}_{H^1(B(y_0,3r))} \tag{4.1.43}$$

Remarque 4.6 *L'inégalité* (4.1.43) *est triviale si $\mu = 0$ et est d'autant plus faible que μ est petit. Elle contient le résultat d'unicité suivant, si $Pu = 0$ sur $B(y_0, 3r)$ et $u = 0$ sur $B(y_0, r)$ alors $u = 0$ sur $B(y_0, 2r)$. Ce résultat est connu sous le nom de prolongement unique.*

Démonstration.
Soit χ défini par

$$\begin{aligned}\chi(y) =& 0 \text{ si } |y - y_0| \leq \frac{r}{2} \text{ ou } |y - y_0| \geq \frac{5r}{2}\\ \chi(y) =& 1 \text{ si } \frac{3r}{4} \leq |y - y_0| \leq \frac{9r}{4}\end{aligned}$$

On applique l'inégalité (4.1.1) à $v = \chi u$. La fonction v vérifie les conditions de support du théorème 4.1. On a,

$$Pv = P(\chi u) = \chi P u + [P, \chi]u.$$

Or

$$[P, \chi] = \sum_j \alpha_j D_j + \alpha_0$$

où les fonction α_j sont à support dans $\{y \in \mathbb{R}^d,\ \frac{r}{2} \leq |y-y_0| \leq \frac{3r}{4}$ ou $\frac{9r}{4} \leq |y-y_0| \leq \frac{5r}{2}\}$ car les fonctions α_j sont composées de dérivées de χ.
Dans la suite la décroissance de φ le long des lignes de niveau partant du centre des cercles joue un rôle fondamental. En effet on a,

$$\begin{aligned}
&\text{sur } \frac{r}{2} \leq |y-y_0| \leq \frac{3r}{4},\ \varphi(y) \leq \frac{e^{-\frac{\beta r^2}{4}}}{\beta} = t_3\\
&\text{sur } \frac{9r}{4} \leq |y-y_0| \leq \frac{5r}{2},\ \varphi(y) \leq \frac{e^{-\frac{81\beta r^2}{16}}}{\beta} = t_1\\
&\text{sur le support de } \chi \text{ on a } \frac{r}{2} \leq |y-y_0|,\ \varphi(y) \leq \frac{e^{-\frac{\beta r^2}{4}}}{\beta} = t_3.
\end{aligned}$$

On a donc, en notant pour simplifier $\|e^{\gamma\varphi}w\|^2_{H^1(K)} = \|e^{\gamma\varphi}w\|^2_{L^2(K)} + \|e^{\gamma\varphi}Dw\|^2_{L^2(K)}$,

$$\begin{aligned}
\|e^{\gamma\varphi}Pv\|^2 \leq& \|e^{\gamma\varphi}Pu\|^2_{L^2(\{y,\ \frac{r}{2}\leq|y-y_0|\leq\frac{5r}{2}\})}\\
&+ C\|e^{\gamma\varphi}u\|^2_{H^1(\{y,\ \frac{r}{2}\leq|y-y_0|\leq\frac{3r}{4}\})} + C\|e^{\gamma\varphi}u\|^2_{H^1(\{y,\ \frac{9r}{4}\leq|y-y_0|\leq\frac{5r}{2}\})}\\
\leq& e^{2\gamma t_3}\|Pu\|^2_{L^2(B(y_0,3r))}\\
&+ Ce^{2\gamma t_3}\|u\|^2_{H^1(B(y_0,r))} + Ce^{2\gamma t_1}\|u\|^2_{H^1(B(y_0,3r))}
\end{aligned} \tag{4.1.44}$$

On a,

$$\text{sur le domaine } r \leq |y-y_0| \leq 2r,\ \varphi \geq \frac{e^{-4\beta r^2}}{\beta} = t_2.$$

On a donc, puisque $\chi = 1$ sur $r \leq |y-y_0| \leq 2r$,

$$\begin{aligned}
\|e^{\gamma\varphi}v\|^2 &\geq \|e^{\gamma\varphi}u\|^2_{L^2(\{y,\ r\leq|y-y_0|\leq 2r\})} \geq e^{2\gamma t_2}\|u\|^2_{L^2(\{y,\ r\leq|y-y_0|\leq 2r\})}\\
\|e^{\gamma\varphi}Dv\|^2 &\geq \|e^{\gamma\varphi}Du\|^2_{L^2(\{y,\ r\leq|y-y_0|\leq 2r\})} \geq e^{2\gamma t_2}\|Du\|^2_{L^2(\{y,\ r\leq|y-y_0|\leq 2r\})}
\end{aligned} \tag{4.1.45}$$

En appliquant l'inégalité (4.1.1) à v et en appliquant les inégalités (4.1.44) et (4.1.45), on obtient,

$$\begin{aligned}
e^{2\gamma t_2}\|u\|^2_{H^1(\{y,\ r\leq|y-y_0|\leq 2r\})} \leq& Ce^{2\gamma t_3}(\|Pu\|^2_{L^2(B(y_0,3r))} + \|u\|^2_{H^1(B(y_0,r))})\\
&+ Ce^{2\gamma t_1}\|u\|^2_{H^1(B(y_0,3r))}.
\end{aligned}$$

Comme $t_1 < t_2 < t_3$, on a en posant $\theta = t_3 - t_2 > 0$ et $\nu = t_2 - t_1 > 0$,

$$\begin{aligned}
\|u\|^2_{H^1(\{y,\ r\leq|y-y_0|\leq 2r\})} \leq& Ce^{2\theta\gamma}(\|Pu\|^2_{L^2(B(y_0,r))} + \|u\|^2_{H^1(B(y_0,r))})\\
&+ Ce^{-2\nu\gamma}\|u\|^2_{H^1(B(y_0,3r))} = e^{2\theta\gamma}M^2 + e^{-2\nu\gamma}N^2.
\end{aligned} \tag{4.1.46}$$

Pour optimiser en γ, on prend γ tel que $e^{(\theta+\nu)\gamma} = \frac{N}{M}$. Cela n'est possible que si le γ obtenu ainsi est supérieur au γ_0 du théorème 4.1. On va pour cela traiter deux cas.
Si $\frac{N}{M} \geq e^{(\theta+\nu)\gamma_0}$.

Alors d'après (4.1.46) et en prenant γ tel que $e^{(\theta+\nu)\gamma} = \dfrac{N}{M}$, on obtient,

$$\|u\|_{H^1(\{y,\ r\leq|y-y_0|\leq 2r\})} \leq 2M^{\frac{\nu}{\theta+\nu}} N^{1-\frac{\nu}{\theta+\nu}}. \tag{4.1.47}$$

On a aussi l'inégalité triviale, en posant $\mu = \frac{\nu}{\theta+\nu}$,

$$\|u\|_{H^1(B(y_0,r))} \leq (\|Pu\|^2_{L^2(B(y_0,r))} + \|u\|_{H^1(B(y_0,r))})^{\mu} \|u\|^{1-\mu}_{H^1(B(y_0,3r))}. \tag{4.1.48}$$

En additionnant (4.1.47) et (4.1.48), on obtient (4.1.43) dans ce cas.
Si $\dfrac{N}{M} \leq e^{(\theta+\nu)\gamma_0}$.
On note $C' = e^{(\theta+\nu)\gamma_0}$. On a $N \leq C'M$ et,

$$\|u\|_{H^1(B(y_0,2r)} \leq N \leq C'' M^{\mu} N^{1-\mu}.$$

Ce qui démontre aussi (4.1.43) dans ce cas. □

4.2 Estimation au voisinage du bord, cas "sortant".

4.2.1 Inégalité de Carleman

Nous allons supposer ici que $Pu = D_d^2 + \sum_{j,k=1}^{d-1} a_{jk}(y) D_j D_k$, que $Y = Y' \times]0,1[$ où Y' est un ouvert de $\mathbb{R}^{d-1}$. Nous noterons $B^+(y_0,r) = B(y_0,r) \cap \{y \in \mathbb{R}^d,\ y_d > 0\}$ et pour $y_0' \in \mathbb{R}^{d-1}$, $\tilde{B}(y_0',r) = \{y' \in \mathbb{R}^{d-1},\ |y_0 - y'| < r\}$. Nous utiliserons aussi la décomposition $y_0 = (y_0', y_{d0})$.

Théorème 4.7 *Soit $r_0 > 0$ tel que $B^+(y_0, 3r_0) \subset Y$, pour tout $r \in]0, r_0]$, il existe $\beta > 0$, $C > 0$, $\gamma_0 > 0$ tels que pour tout $u \in \mathcal{C}_0^\infty(B(y_0,3r))$ vérifiant* $\operatorname{supp} u \subset \{y \in \mathbb{R}^d,\ r/2 \leq |y-y_0| \leq 3r\}$ *on a*

$$\begin{aligned} &\gamma^3 \|e^{\gamma\varphi} u\|^2_{L^2(B^+(y_0,3r))} + \gamma \|e^{\gamma\varphi} Du\|^2_{L^2(B^+(y_0,3r))} \leq \\ &\quad C\{\|e^{\gamma\varphi} Pu\|^2_{L^2(B^+(y_0,3r))} + \gamma^3 \|(e^{\gamma\varphi} u)_{|y_d=0}\|^2_{L^2(\tilde{B}(y_0',3r)} + \gamma \|(e^{\gamma\varphi} Du)_{|y_d=0}\|^2_{L^2(\tilde{B}(y_0',3r)}\} \end{aligned} \tag{4.2.1}$$

Démonstration.
Nous allons reprendre la méthode de la partie 4.1.1, la seule différence est la présence du bord. Cela ne changera rien pour les variables $(y_1, \cdots, y_{d-1})$ mais il faudra tenir compte des termes de bord pour la variable y_d. Comme nous utiliserons dans la partie 4.3.1 les mêmes calculs que dans cette partie, nous allons faire un calcul un peu plus précis que nécessaire pour ne pas avoir à refaire les calculs dans la partie 4.3.1. Nous utiliserons les notations suivantes

$$\|u\| = \|u\|_{L^2(B^+(y_0,3r))} \text{ et } (u|v) \text{ le produit scalaire associé} \tag{4.2.2}$$

$$|w| = \|w\|_{L^2(\tilde{B}(y_{d0},3r))} \text{ et } (w|\tilde{w})_0 \text{ le produit scalaire associé} \tag{4.2.3}$$

Avec ces notations on a la formule d'intégration par partie suivante,

$$(D_d u|v) = (iu_{|y_d=0}|v_{|y_d=0})_0 + (u|D_d v) \tag{4.2.4}$$

Nous posons également $v = e^{\gamma\varphi}u$, la formule (4.1.3) est toujours valable et nous avons $e^{\gamma\varphi}Pu = Av + iBv$ où

$$A = D_d^2 + \sum_{jk=1}^{d-1} a_{jk}D_jD_k - \gamma^2\Big(\sum_{jk=1}^{d-1} a_{jk}\varphi'_j\varphi'_k + (\varphi'_d)^2\Big) \tag{4.2.5}$$

$$B = 2\gamma\sum_{jk=1}^{d-1} a_{jk}\varphi'_j D_k + 2\gamma\varphi'_d D_d. \tag{4.2.6}$$

Dans la suite, pour alléger les écritures nous noterons $\sum_{jk=1}^{d-1} = \sum_{jk}$ s'il n'y a pas d'ambiguïté possible et $D' = (D_1, \cdots, D_{d-1})$.
Nous appellerons un "reste" un terme majoré de la façon suivante

(4.2.7)

$$\exists C > 0,\ \forall\varepsilon,\ \forall\beta,\ \exists K_{\varepsilon,\beta} \text{ tels que}$$
$$\begin{aligned}|\text{"reste"}| \le C\varepsilon(\|Av\|^2 + \|Bv\|^2) + K_{\varepsilon,\beta}(\gamma^2\|v\|^2 + \|Dv\|^2) + C(\gamma^3\|e^{-\frac{3\beta\psi}{2}}v\|^2 + \gamma\|e^{-\frac{\beta\psi}{2}\psi}Dv\|^2)\\ + K_{\varepsilon,\beta}(\gamma|D'v_{|y_d=0}||Dv_{|y_d=0}| + \gamma^2|v_{|y_d=0}||Dv_{|y_d=0}| + \gamma^3|v_{|y_d=0}|^2).\end{aligned}$$

Un certain nombre de termes de $2(\mathrm{Re}(Av|iBv)$ ont été calculés dans la partie 4.1.1, nous avons donc en reprenant la formule (4.1.23),

$$\begin{aligned}\sum_{jk\ell p} 2\,\mathrm{Re}(a_{jk}D_jD_kv|2ia_{\ell p}\gamma\varphi'_\ell D_pv) =& 4\gamma\beta\|e^{-\frac{\beta\psi}{2}}\sum_{jk} a_{jk}\psi'_jD_kv\|^2\\ &- 2\gamma\beta\sum_{jk}(\tilde{H}e^{-\beta\psi}a_{jk}D_kv|D_jv) + \text{"reste"}\end{aligned} \tag{4.2.8}$$

où nous avons noté $\tilde{H} = \sum_{\ell p} a_{\ell p}\psi'_\ell\psi'_p$. De même nous noterons $H = \tilde{H} + (\psi'_d)^2$. Nous avons également en reprenant (4.1.29)

$$\begin{aligned}2\sum_{\ell p}\mathrm{Re}(-\gamma^2(\sum_{jk} a_{jk}\varphi'_j\varphi'_k + (\varphi'_d)^2)v|2ia_{\ell p}\gamma\varphi'_\ell D_pv) =& 6\beta\gamma^3\|e^{-\frac{3\beta\psi}{2}}\tilde{H}v\|^2\\ &+ 6\beta\gamma^3(e^{-3\beta\psi}(\psi'_d)^2\tilde{H}v|v) + \text{"reste"}.\end{aligned} \tag{4.2.9}$$

Calcul de $2\,\mathrm{Re}(D_d^2v|2\gamma ia_{jk}\varphi'_jD_kv)$.

On a,

$$\begin{aligned}(D_d^2v|2\gamma ia_{jk}\varphi'_jD_kv) &= (D_dv|2\gamma iD_d(a_{jk}\varphi'_jD_kv)) + (D_dv_{|y_d=0}|2\gamma(a_{jk})_{|y_d=0}(\varphi'_j)_{|y_d=0}D_kv_{|y_d=0})_0\\ &= (D_dv|2\gamma ia_{jk}\varphi'_jD_dD_kv) + (D_dv|2\gamma\frac{\partial a_{jk}}{\partial y_d}\varphi'_jD_kv) + (D_dv|2\gamma a_{jk}\varphi''_{jd}D_kv) + \text{"reste"}\end{aligned} \tag{4.2.10}$$

car le terme de bord est un "reste" puisque majoré par $\gamma K_\beta |D_d v_{|y_d=0}||D_k v_{|y_d=0}|$.
Le terme $(D_d v|2\gamma \frac{\partial a_{jk}}{\partial y_d}\varphi'_j D_k v)$ est le même que T_2 de (4.1.10) et est un "reste" (voir (4.1.12)).
On a d'après (4.1.11)

$$(D_d v|2\gamma a_{jk}\varphi''_{jd} D_k v) = (D_d v|2\gamma\beta a_{jk}\psi'_j\psi'_d e^{-\beta\psi} D_k v) - (D_d v|2\gamma a_{jk}\psi''_{jd} e^{-\beta\psi} D_k v) \tag{4.2.11}$$

et le deuxième terme de cette expression est un "reste", il est du même type que le terme T_6 de (4.1.13) et (4.1.14). On a donc d'après (4.2.10) et (4.2.11)

$$\begin{aligned} 2\,\mathrm{Re}(D_d^2 v|2\gamma i a_{jk}\varphi'_j D_k v) =& 2\,\mathrm{Re}(D_d v|2\gamma i a_{jk}\varphi'_j D_d D_k v) \\ &+ 2\,\mathrm{Re}(D_d v|2\gamma\beta a_{jk}\psi'_j\psi'_d e^{-\beta\psi} D_k v) + \text{"reste"}. \end{aligned} \tag{4.2.12}$$

On a

$$\begin{aligned} V_0 = (D_d v|2\gamma i a_{jk}\varphi'_j D_d D_k v) =& -2\gamma(iD_k(a_{jk}\varphi'_j D_d v)|D_d v) \\ =& -2\gamma(i a_{jk}\varphi'_j D_k D_d v|D_d v) - 2\gamma(\frac{\partial a_{jk}}{\partial y_k}\varphi'_j D_d v|D_d v) \\ &- 2\gamma(a_{jk}\varphi''_{jk} D_d v|D_d v) = V_1 + V_2 + V_3. \end{aligned} \tag{4.2.13}$$

Le terme V_2 est du même type que T_2 de (4.1.10) et est un "reste" (voir (4.1.12)).
On a d'après (4.1.11) et le calcul (4.2.11)

$$V_3 = -2\gamma\beta(a_{jk}\psi'_j\psi'_k e^{-\beta\psi} D_d v|D_d v) + \text{"reste"}. \tag{4.2.14}$$

Or $V_1 = -\overline{V_0}$ donc d'après (4.2.13) et (4.2.14) on a

$$2\,\mathrm{Re}(D_d v|2\gamma i a_{jk}\varphi'_j D_d D_k v) = -2\gamma\beta(a_{jk}\psi'_j\psi'_k e^{-\beta\psi} D_d v|D_d v) + \text{"reste"}. \tag{4.2.15}$$

On a d'après (4.2.12) et (4.2.15)

$$\begin{aligned} 2\,\mathrm{Re}(D_d^2 v|2\gamma i a_{jk}\varphi'_j D_k v) =& 2\,\mathrm{Re}(D_d v|2\gamma\beta a_{jk}\psi'_j\psi'_d e^{-\beta\psi} D_k v) \\ &- 2\gamma\beta(a_{jk}\psi'_j\psi'_k e^{-\beta\psi} D_d v|D_d v) + \text{"reste"}. \end{aligned} \tag{4.2.16}$$

<u>Calcul de $2\,\mathrm{Re}(D_d^2 v|2\gamma i\varphi'_d D_d v)$.</u>
On a,

$$\begin{aligned} (D_d^2 v|2\gamma i\varphi'_d D_d v) =& (D_d v|2\gamma i D_d(\varphi'_d D_d v)) + i((D_d v)_{|y_d=0}|2\gamma i(\varphi'_d)_{|y_d=0}(D_d v)_{|y_d=0})_0 \\ =& (D_d v|2\gamma i\varphi'_d D_d^2 v) + (D_d v|2\gamma\varphi''_{dd} D_d v) + ((D_d v)_{|y_d=0}|2\gamma(\varphi'_d)_{|y_d=0}(D_d v)_{|y_d=0})_0. \end{aligned} \tag{4.2.17}$$

Or

$$(D_d v|2\gamma\varphi''_{dd} D_d v) = 2\gamma\beta(D_d v|(\psi'_d)^2 e^{-\beta\psi} D_d v) - 2\gamma(D_d v|\psi''_{dd} e^{-\beta\psi} D_d v) \tag{4.2.18}$$

et

$$2\gamma|(D_d v|\psi''_{dd} e^{-\beta\psi} D_d v)| \leq C\gamma\|e^{-\frac{\beta\psi}{2}} D_d v\|^2 \leq \text{"reste"}. \tag{4.2.19}$$

De (4.2.17), (4.2.18) et (4.2.19), on a

$$\begin{aligned}2\,\mathrm{Re}(D_d^2 v|2\gamma i\varphi_d' D_d v) =& 2\gamma\beta\|\psi_d' e^{-\frac{\beta\psi}{2}} D_d v\|^2 \\ &+ 2\gamma((D_d v)_{|y_d=0}|(\varphi_d')_{|y_d=0}(D_d v)_{|y_d=0})_0 + \text{"reste"}.\end{aligned} \tag{4.2.20}$$

Calcul de $2\,\mathrm{Re}(\sum_{jk} a_{jk} D_j D_k v|2i\gamma\varphi_d' D_d v)$.

On a

$$\begin{aligned}V_4 = (a_{jk} D_j D_k v|2i\gamma\varphi_d' D_d v) =& (D_k v|D_j(2a_{jk} i\gamma\varphi_d' D_d v)) \\ =& (D_k v|2a_{jk} i\gamma\varphi_d' D_j D_d v) + (D_k v|2\gamma\frac{\partial a_{jk}}{\partial y_j}\varphi_d' D_d v) \\ &+ (D_k v|2\gamma a_{jk}\varphi_{dj}'' D_d v) = V_5 + V_6 + V_7.\end{aligned} \tag{4.2.21}$$

Le terme V_6 est un "reste" comme le terme T_2 de (4.1.10).
D'après (4.1.11), on a

$$\begin{aligned}V_7 =& 2\gamma\beta(D_k v|a_{jk}\psi_d'\psi_j' e^{-\beta\psi} D_d v) - 2\gamma(D_k v|a_{jk}\psi_{dj}'' e^{-\beta\psi} D_d v) \\ =& 2\gamma\beta(D_k v|a_{jk}\psi_d'\psi_j' e^{-\beta\psi} D_d v) + \text{"reste"}\end{aligned} \tag{4.2.22}$$

il suffit de procéder comme pour le terme T_6 (voir (4.1.14)).
On a donc

$$\begin{aligned}2\,\mathrm{Re}(a_{jk} D_j D_k v|2i\gamma\varphi_d' D_d v) = & 2\,\mathrm{Re}(D_k v|2a_{jk} i\gamma\varphi_d' D_j D_d v) \\ &+ 4\gamma\beta\,\mathrm{Re}(D_k v|a_{jk}\psi_d'\psi_j' e^{-\beta\psi} D_d v) + \text{"reste"}\end{aligned} \tag{4.2.23}$$

On a

$$\begin{aligned}(D_k v|2a_{jk} i\gamma\varphi_d' D_j D_d v) =& -(2i\gamma D_d(a_{jk}\varphi_d' D_k v)|D_j v) \\ &- (2\gamma(a_{jk})_{|y_d=0}(\varphi_d')_{|y_d=0} D_k v_{|y_d=0}|D_j v_{|y_d=0})_0 \\ =& -(2i\gamma a_{jk}\varphi_d' D_d D_k v|D_j v) - (2\gamma\frac{\partial a_{jk}}{\partial y_d}\varphi_d' D_k v|D_j v) \\ &- (2\gamma a_{jk}\varphi_{dd}'' D_k v|D_j v) - (2\gamma(a_{jk})_{|y_d=0}(\varphi_d')_{|y_d=0} D_k v_{|y_d=0}|D_j v_{|y_d=0})_0 \\ =& V_8 + V_9 + V_{10} + V_{11}.\end{aligned} \tag{4.2.24}$$

Le terme V_9 est un "reste" comme le terme T_2 de (4.1.10).
Le terme V_{11} est un terme de "reste" comme le terme de bord de (4.2.10).
On a d'après (4.1.11) et en procédant comme dans (4.2.23)

$$V_{10} = -2\gamma\beta(a_{jk}(\psi_d')^2 e^{-\beta\psi} D_k v|D_j v) + \text{"reste"} \tag{4.2.25}$$

Par symétrie de la matrice (a_{ij}), on a,

$$\sum_{jk}(D_k v|2a_{jk} i\gamma\varphi_d' D_j D_d v) = \overline{\sum_{jk}(2i\gamma a_{jk}\varphi_d' D_d D_k v|D_j v)}. \tag{4.2.26}$$

Donc, de (4.2.24) et (4.2.25) on a,

$$2\,\mathrm{Re}\sum_{jk}(D_kv|2a_{jk}i\gamma\varphi'_dD_jD_dv) = -2\gamma\beta\sum_{jk}(a_{jk}(\psi'_d)^2e^{-\beta\psi}D_kv|D_jv) + \text{“reste”}. \tag{4.2.27}$$

D'où de (4.2.23), on a

$$\begin{aligned}2\sum_{jk}\mathrm{Re}(a_{jk}D_jD_kv|2i\gamma\varphi'_dD_dv) =&4\gamma\beta\sum_{jk}\mathrm{Re}(D_kv|a_{jk}\psi'_d\psi'_je^{-\beta\psi}D_dv)\\ &-2\gamma\beta\sum_{jk}(a_{jk}(\psi'_d)^2e^{-\beta\psi}D_kv|D_jv) + \text{“reste”}.\end{aligned} \tag{4.2.28}$$

<u>Calcul de $-2\gamma^2\,\mathrm{Re}((\sum_{jk}(a_{jk}\varphi'_j\varphi'_k)+(\varphi'_d)^2)v|2i\gamma\varphi'_dD_dv)$.</u>

On a en tenant compte de symétrie de a_{jk},

$$\begin{aligned}((-\gamma^2\sum_{jk}(a_{jk}\varphi'_j\varphi'_k)+(\varphi'_d)^2)v|2i\gamma\varphi'_dD_dv) =& -2\gamma^3(D_d(-i\varphi'_d(\sum_{jk}(a_{jk}\varphi'_j\varphi'_k)+(\varphi'_d)^2)v)|v)\\ &+2\gamma^3((\varphi'_d)_{|y_d=0}(\sum_{jk}((a_{jk})_{|y_d=0}(\varphi'_j)_{|y_d=0}(\varphi'_k)_{|y_d=0})+((\varphi'_d)_{|y_d=0})^2)v_{|y_d=0})|v_{|y_d=0})_0\\ =&2\gamma^3(i\varphi'_d(\sum_{jk}(a_{jk}\varphi'_j\varphi'_k)+(\varphi'_d)^2)D_dv|v)\\ &+2\gamma^3(\varphi''_{dd}(\sum_{jk}(a_{jk}\varphi'_j\varphi'_k)+(\varphi'_d)^2)v|v)\\ &+2\gamma^3(\varphi'_d(\sum_{jk}(\frac{\partial a_{jk}}{\partial y_d}\varphi'_j\varphi'_k))v|v)\\ &+2\gamma^3(2\varphi'_d(\sum_{jk}(a_{jk}\varphi''_{jd}\varphi'_k)+\varphi'_d\varphi''_{dd})v|v)\\ &+\text{“reste”}\\ =&V_{11}+V_{12}+V_{13}+V_{14}+\text{“reste”}\end{aligned} \tag{4.2.29}$$

car le terme de bord est un “reste”.
Le terme V_{13} est un “reste” comme le terme S_2 de (4.1.25).
On a d'après (4.1.11) et en procédant comme pour (4.2.23),

$$\begin{aligned}V_{12}+V_{14} =& 2\beta\gamma^3(e^{-3\beta\psi}(\psi'_d)^2(\sum_{jk}(a_{jk}\psi'_j\psi'_k)+(\psi'_d)^2)v|v)\\ &+4\beta\gamma^3(e^{-3\beta\psi}\psi'_d(\sum_{jk}(a_{jk}\psi'_d\psi'_j\psi'_k)+(\psi'_d)^3)v|v)+\text{“reste”}\\ =& 6\beta\gamma^3(e^{-3\beta\psi}(\sum_{jk}(a_{jk}(\psi'_d)^2\psi'_j\psi'_k)+(\psi'_d)^4)v|v)+\text{“reste”}\end{aligned} \tag{4.2.30}$$

De (4.2.29) et (4.2.30) on a,

$$
\begin{aligned}
&-2\gamma^2 \operatorname{Re}((\sum_{jk}(a_{jk}\varphi'_j\varphi'_k) + (\varphi'_d)^2)v|2i\gamma\varphi'_d D_d v) \\
&\qquad = 6\beta\gamma^3(e^{-3\beta\psi}(\sum_{jk}(a_{jk}(\psi'_d)^2\psi'_j\psi'_k) + (\psi'_d)^4)v|v) + \text{“reste”}.
\end{aligned} \tag{4.2.31}
$$

Nous avons donc de (4.2.8), (4.2.9), (4.2.16), (4.2.20), (4.2.28) et (4.2.31),

$$
\begin{aligned}
2\operatorname{Re}(Av|iBv) =& 4\gamma\beta\|e^{-\frac{\beta\psi}{2}}\sum_{jk}a_{jk}\psi'_j D_k v\|^2 - 2\gamma\beta\sum_{jk}(\tilde{H}e^{-\beta\psi}a_{jk}D_k v|D_j v) \\
&+ 6\beta\gamma^3\|e^{-\frac{3\beta\psi}{2}}\tilde{H}v\|^2 + 6\beta\gamma^3(e^{-3\beta\psi}(\psi'_d)^2\tilde{H}v|v) \\
&+ 2\operatorname{Re}(D_d v|2\gamma\beta\sum_{jk}(a_{jk}\psi'_j\psi'_d e^{-\beta\psi}D_k v)) \\
&- 2\gamma\beta(\sum_{jk}(a_{jk}\psi'_j\psi'_k)e^{-\beta\psi}D_d v|D_d v) + 2\gamma\beta\|\psi'_d e^{-\frac{\beta\psi}{2}}D_d v\|^2 \\
&+ 2\gamma((D_d v)_{|y_d=0}|(\varphi'_d)_{|y_d=0}(D_d v)_{|y_d=0})_0 \\
&+ 4\gamma\beta\sum_{jk}\operatorname{Re}(D_k v|a_{jk}\psi'_d\psi'_j e^{-\beta\psi}D_d v) \\
&- 2\gamma\beta\sum_{jk}(a_{jk}(\psi'_d)^2 e^{-\beta\psi}D_k v|D_j v) \\
&+ 6\beta\gamma^3(e^{-3\beta\psi}((\psi'_d)^2\tilde{H} + (\psi'_d)^4)v|v) + \text{“reste”}.
\end{aligned} \tag{4.2.32}
$$

Comme

$$
\begin{aligned}
4\gamma\beta\|e^{-\frac{\beta\psi}{2}}(\sum_{jk}(a_{jk}\psi'_j D_k v) + \psi'_d D_d v)\|^2 =& 4\gamma\beta\|e^{-\frac{\beta\psi}{2}}\sum_{jk}a_{jk}\psi'_j D_k v\|^2 \\
&+ 4\operatorname{Re}(D_d v|2\gamma\beta\sum_{jk}(a_{jk}\psi'_j\psi'_d e^{-\beta\psi}D_k v)) \\
&+ 4\gamma\beta\|\psi'_d e^{-\frac{\beta\psi}{2}}D_d v\|^2
\end{aligned} \tag{4.2.33}
$$

et

$$
\begin{aligned}
6\beta\gamma^3\|e^{-\frac{3\beta\psi}{2}}Hv\|^2 =& 6\beta\gamma^3\|e^{-\frac{3\beta\psi}{2}}\tilde{H}v\|^2 \\
&+ 12\beta\gamma^3(e^{-3\beta\psi}(\psi'_d)^2\tilde{H}v|v) + 6\beta\gamma^3(e^{-3\beta\psi}(\psi'_d)^4)v|v).
\end{aligned} \tag{4.2.34}
$$

On a d'après (4.2.32), (4.2.33), (4.2.34)

$$
\begin{aligned}
2\operatorname{Re}(Av|iBv) =& 4\gamma\beta\|e^{-\frac{\beta\psi}{2}}(\sum_{jk}(a_{jk}\psi'_j D_k v) + \psi'_d D_d v)\|^2 + 6\beta\gamma^3\|e^{-\frac{3\beta\psi}{2}}Hv\|^2 \\
&- 2\beta\gamma(\sum_{jk}(e^{-\beta\psi}Ha_{jk}D_j v|D_k v) + (e^{-\beta\psi}HD_d v|D_d v)) \\
&+ 2\gamma((D_d v)_{|y_d=0}|(\varphi'_d)_{|y_d=0}(D_d v)_{|y_d=0})_0 + \text{“reste”}.
\end{aligned} \tag{4.2.35}
$$

Remarquons que mis à part le terme de bord, cette formule est la même que celle obtenue en (4.1.30). Nous allons majorer les dérivées de la même façon.
En reprenant la formule (4.1.31) et (4.1.32), on a

$$2\beta\gamma(\sum_{jk}(e^{-\beta\psi}Ha_{jk}D_jv|D_kv) = 2\beta\gamma((e^{-\beta\psi}H\sum_{jk}a_{jk}D_kD_jv|v) + \text{“reste”} \tag{4.2.36}$$

On a

$$\begin{aligned}2\beta\gamma(e^{-\beta\psi}HD_dv|D_dv) =&2\beta\gamma(D_d(e^{-\beta\psi}HD_dv)|v) - 2i\beta\gamma((e^{-\beta\psi})_{|y_d=0}H_{|y_d=0}(D_dv)_{|y_d=0}|v_{|y_d=0})\\ =&2\beta\gamma(e^{-\beta\psi}HD_d^2v|v) + 2\beta\gamma(i\beta\psi_d'e^{-\beta\psi}HD_dv|v)\\ &- 2i\beta\gamma(e^{-\beta\psi}\frac{\partial H}{\partial y_d}D_dv|v) - 2i\beta\gamma((e^{-\beta\psi})_{|y_d=0}H_{|y_d=0}(D_dv)_{|y_d=0}|v_{|y_d=0})\\ =&V_{15}+V_{16}+V_{17}+V_{18}.\end{aligned} \tag{4.2.37}$$

Or d'après (4.2.7),

$$|V_{16}+V_{17}+V_{18}| \leq K_\beta\gamma(\|v\|\|Dv\| + |v_{|y_d=0}||D_dv_{|y_d=0}|) \leq |\text{“reste”}| \tag{4.2.38}$$

Nous avons donc d'après, (4.2.36), (4.2.37) et (4.2.38),

$$\begin{aligned}2\beta\gamma((\sum_{jk}(e^{-\beta\psi}Ha_{jk}D_jv|D_kv))+(e^{-\beta\psi}HD_dv|D_dv))&\\ = 2\beta\gamma(e^{-\beta\psi}H(\sum_{jk}a_{jk}D_jD_k + D_d^2)v|v) + \text{“reste”}&\end{aligned} \tag{4.2.39}$$

Nous rappelons que d'après (4.2.5),

$$A = D_d^2 + \sum_{jk=1}^{d-1}a_{jk}D_jD_k - \gamma^2(\sum_{jk=1}^{d-1}a_{jk}\varphi_j'\varphi_k' + (\varphi_d')^2). \tag{4.2.40}$$

On a donc d'après (4.2.39) et (4.2.40) (voir aussi (4.1.34) et (4.1.36))

$$\begin{aligned}2\beta\gamma((\sum_{jk}(e^{-\beta\psi}Ha_{jk}D_jv|D_kv))+(e^{-\beta\psi}HD_dv|D_dv))&\\ = 2\beta\gamma(e^{-\beta\psi}HAv|v) + 2\beta\gamma^3\|e^{-\frac{\beta\psi}{2}}Hv\|^2 + \text{“reste”}&\\ = 2\beta\gamma^3\|e^{-\frac{\beta\psi}{2}}Hv\|^2 + \text{“reste”}&\end{aligned} \tag{4.2.41}$$

car d'après (4.2.7)

$$|\beta\gamma(e^{-\beta\psi}HAv|v)| \leq \varepsilon\|Av\|^2 + K_{\varepsilon,\beta}\gamma^2\|v\|^2 \leq |\text{“reste”}|.$$

On a d'après (4.2.35) et (4.2.41)

$$
\begin{aligned}
2\,\mathrm{Re}(Av|iBv) + |\text{“reste”}| \geq & 2\beta\gamma^3\|e^{-\frac{3\beta\psi}{2}}Hv\|^2 \\
& + 2\beta\gamma((\sum_{jk}(e^{-\beta\psi}Ha_{jk}D_jv|D_kv)) + (e^{-\beta\psi}HD_dv|D_dv)) \\
& + 2\gamma(D_dv_{|y_d=0}|(\varphi'_d)_{|y_d=0}D_dv_{|y_d=0})_0
\end{aligned} \tag{4.2.42}
$$

À partir de (4.2.42), nous pouvons, en reprenant les arguments des preuves de (4.1.38), (4.1.39), (4.1.40) et (4.1.41), obtenir de la même façon que (4.1.42)

$$
\begin{aligned}
\|Av+iBv\|^2 + & K_{\varepsilon,\beta}(\gamma|D'v_{|y_d=0}||Dv_{|y_d=0}| + \gamma^2|v_{|y_d=0}||Dv_{|y_d=0}| + \gamma^3|v_{|y_d=0}|^2) \geq \\
& (C/2)(\gamma^3\|v\|^2 + \gamma\|Dv\|^2) + 2\gamma(D_dv_{|y_d=0}|(\varphi'_d)_{|y_d=0}D_dv_{|y_d=0})_0.
\end{aligned} \tag{4.2.43}
$$

Comme

$$
\begin{aligned}
K_{\varepsilon,\beta}(\gamma|D'v_{|y_d=0}||Dv_{|y_d=0}| & + \gamma^2|v_{|y_d=0}||Dv_{|y_d=0}| + \gamma^3|v_{|y_d=0}|^2) \\
& + 2\gamma|(D_dv_{|y_d=0}|(\varphi'_d)_{|y_d=0}D_dv_{|y_d=0})_0| \\
& \leq K_{\varepsilon,\beta}(\gamma|Dv_{|y_d=0}|^2 + \gamma^3|v_{|y_d=0}|^2)
\end{aligned} \tag{4.2.44}
$$

on obtient (4.2.1) de (4.2.43) et (4.2.44) en remplaçant v en fonction de u (voir les explications permettant de passer de (4.1.4) à (4.1.1)). □

4.2.2 Inégalité d'interpolation

Théorème 4.8 *Soit $r_0 > 0$ tel que $B^+(y_0, 3r_0) \subset Y$, pour tout $r \in]0, r_0]$, il existe $C > 0$ et $\mu \in]0,1[$ tels que pour tout $u \in \mathcal{C}^\infty(Y)$ on a*

$$
\|u\|_{H^1(B^+(y_0,2r))} \leq CA^\mu \|u\|^{1-\mu}_{H^1(B^+(y_0,3r))} \tag{4.2.45}
$$

où

$$
A = \|u\|_{H^1(B^+(y_0,r))} + \|Pu\|_{L^2(B^+(y_0,3r))} + \|u_{|y_d=0}\|_{H^1(\tilde{B}(y'_0,3r))} + \|(D_du)_{|y_d=0}\|_{L^2(\tilde{B}(y'_0,3r))} \tag{4.2.46}
$$

Remarque 4.9 *Si on a, $-2r < y_{d0} < -r$ alors $\|u\|_{H^1(B^+(y_0,r))} = 0$ car $B^+(y_0, r) = \emptyset$. On a dans ce cas une estimation de la solution à l'intérieur (car $B^+(y_0, 2r) \neq \emptyset$) par les termes de bord et Pu.*

Démonstration.
La preuve est analogue à celle du théorème 4.5. La seule différence est que dans l'inégalité (4.1.44) on a le terme supplémentaire

$$
e^{2\gamma t_3}(\|u_{|y_d=0}\|_{H^1(\tilde{B}(y'_0,3r))} + \|(D_du)_{|y_d=0}\|_{L^2(\tilde{B}(y'_0,3r))}). \tag{4.2.47}
$$

Il suffit de tenir compte de ce terme dans M intervenant dans (4.1.46) pour finir la preuve de la même manière. □

4.3 Estimation au voisinage du bord, cas "entrant".

4.3.1 Inégalité de Carleman

Théorème 4.10 *Soit $r_0 > 0$ tel que $B^+(y_0, 3r_0) \subset Y$, pour tout $r \in]0, r_0]$, il existe $\beta > 0$, $C > 0$, $\gamma_0 > 0$ tels que pour tout $u \in \mathcal{C}_0^\infty(B(y_0, 3r))$ vérifiant* $\operatorname{supp} u \subset \{y \in \mathbb{R}^d,\ r/2 \leq |y - y_0| \leq 3r\}$ *et $u(y', 0) = 0$. On suppose de plus $y_{d0} > 0$ alors pour tout $\gamma \geq \gamma_0$, on a*

$$\gamma^3 \|e^{\gamma\varphi} u\|^2_{L^2(B^+(y_0,3r))} + \gamma \|e^{\gamma\varphi} Du\|^2_{L^2(B^+(y_0,3r))} + \gamma \|(e^{\gamma\varphi} D_d u)_{|y_d=0}\|^2_{L^2(\tilde{B}(y_0',3r))} \leq C \|e^{\gamma\varphi} Pu\|^2_{L^2(B^+(y_0,3r))} \tag{4.3.1}$$

Remarque 4.11 *L'hypothèse $y_{d0} > 0$ n'est faite que pour assurer que $\varphi_d'(y) > 0$ si $y_d = 0$ et si $y \in \operatorname{supp} u$.*

Démonstration.
Nous reprenons l'inégalité (4.2.43) et la définition $v = e^{\gamma\varphi} u$, par choix de φ on a $\varphi_d' > 0$ sur $B^+(y_0, 3r_0)$, le terme $(D_d v_{|y_d=0} | (\varphi_d')_{|y_d=0} D_d v_{|y_d=0})_0$ permet de majorer $|(D_d v)_{|y_d=0}|^2$. Comme $u(y', 0) = 0$ on a aussi $v(y', 0) = 0$ et $D'v(y', 0) = 0$, et ainsi tous les termes de bord du côté gauche de l'inégalité (4.2.43) sont nuls. On a donc, avec une autre constante C, l'inégalité,

$$\|Av + iBv\|^2 \geq C(\gamma^3 \|v\|^2 + \gamma \|Dv\|^2 + \gamma |D_d v_{|y_d=0}|^2),$$

ce qui implique (4.3.1) en remplaçant v en fonction de u (voir les explications permettant de passer de (4.1.4) à (4.1.1)). □

4.3.2 Inégalité d'interpolation

Théorème 4.12 *Soit $r_0 > 0$ tel que $B^+(y_0, 3r_0) \subset Y$ où $y_{d0} = 3r/2$, pour tout $r \in]0, r_0]$, il existe $C > 0$ et $\mu \in]0, 1[$ tels que pour tout $u \in \mathcal{C}^\infty(Y)$ vérifiant $u(y', 0) = 0$ on a*

$$\|u\|_{H^1(B^+((y_0',0),r/2))} \leq C(\|u\|_{H^1(B^+(y_0,r))} + \|Pu\|_{L^2(B^+(y_0,3r))})^\mu \|u\|^{1-\mu}_{H^1(B^+(y_0,3r))} \tag{4.3.2}$$

Démonstration.
La preuve est identique à celle du théorème 4.5, la seule différence est qu'on travaille dans $y_d > 0$. Il faut également remarquer qu'avec le choix des paramètres on a $B((y_0', 0), r/2) \subset B(y_0, 2r)$. □

4.4 Inégalité d'interpolation globale.

Nous sommes maintenant en mesure de prouver l'inégalité du théorème 3.18. La preuve se fait en trois étapes, on va prouver une inégalité d'interpolation sur un voisinage de $\{0\} \times \omega$ (application du théorème 4.8), puis nous prouverons une inégalité d'interpolation sur $[T_0, T_1] \times (\Omega \setminus W)$ où W est un voisinage du bord (application par récurrence de théorème 4.5), puis nous prouverons une inégalité d'interpolation sur $[T_0, T_1] \times W$ (application du théorème 4.12)

Première étape.

Nous allons tout d'abord montrer en reprenant les notations utilisées dans le théorème 3.18, qu'il existe $C > 0$ et $\mu \in]0, 1[$ tels que,

$$\|F\|_{H^1(B)} \leq C\|\partial_t F(0, \cdot)\|^{\mu}_{L^2(\omega)}\|F\|^{1-\mu}_{H^1(X_{T_2})} \tag{4.4.1}$$

où $B =]0, \varepsilon[\times B(x_0, \varepsilon)$ pour $x_0 \in \omega$ à choisir ainsi que ε.
Appliquons le théorème 4.8 où $d = n+1$, $t = y_d$, $x_j = y_j$, $u = F$, $P = \partial_t^2 + \Delta$. Prenons $y_{d0} = t_0 = -3r/2$, $x_0 \in \omega$ et r_0 tel que $B(x_0, 3r_0) \subset \omega$, r assez petit pour que $B^+((x_0, -3r/2), 3r) \subset X_{T_2}$. On a en tenant compte de la remarque 4.9

$$\|F\|_{H^1(B^+((x_0,-3r/2),2r))} \leq C\|\partial_t F(0, \cdot)\|^{\mu}_{L^2(B(x_0,3r))}\|F\|^{1-\mu}_{H^1(B^+((x_0,-3r/2),3r))}.$$

Ce qui donne (4.4.1) si on prend ε assez petit pour que $B \subset B^+((x_0, -3r/2), 2r)$. □

Deuxième étape.

Fixons $(t_1, x_1) \in B$, en utilisant les notations de (4.4.1), et δ tel que $B((t_1, x_1), \delta) \subset B$. Soit $(t_2, x_2) \in X_{T_0T_1}$. Le but est de démontrer qu'il existe $C > 0$, $\alpha > 0$ et $r \in]0, \delta[$ tels que

$$\|F\|_{H^1(B((t_2,x_2),r))} \leq C\|F\|^{\alpha}_{H^1(B((t_1,x_1),r))}\|F\|^{1-\alpha}_{H^1(X_{T_2})} \tag{4.4.2}$$

Pour cela nous allons montrer qu'on peut construire une suite de boules permettant de relier (t_1, x_1) à (t_2, x_2), ce qui fait l'objet du lemme suivant.

Lemme 4.13 *Soit Y un ouvert connexe de $\mathbb{R}^d$, soit $y_0, y_1 \in Y$ alors il existe $r_0 > 0$ tel que pour tout $r \in]0, r_0[$, il existe $K \in \mathbb{N}$ et une suite z_k telle que $z_0 = y_0$, $z_K = y_1$ vérifiant, pour $k = 0, \cdots K$, $B(z_k, 3r) \subset Y$ et, pour tout $k = 0, \cdots, K-1$, $B(z_{k+1}, r) \subset B(z_k, 2r)$.*

Démonstration.
Soit $z(t)$ un chemin dans Y de y_0 à y_1 c'est à dire $z(0) = y_0$, $z(1) = y_1$ et $z(t) \in Y$ pour tout $t \in [0, 1]$. Soit $R_0 = \inf_{t\in[0,1]} d(z(t), \mathbb{R}^d \setminus Y)$, $R_0 > 0$ par compacité de $[0, 1]$ et fixons $r_0 \leq R_0/3$.
Posons $t_0 = 0$ et par récurrence $t_{j+1} = \inf\{t,\ t_j \leq t \leq 1,\ z(t) \notin B(z(t_j), r)\}$.
Si $z(1) \in B(z(t_j), r)$, on pose $z_{j+1} = y_1 = z(1)$ et on arrête la construction des z_k. On remarque que dans ce cas $|z_{j+1} - z_j| < r$.
Si $z(1) \notin B(z(t_j), r)$ alors on pose $z_{j+1} = z(t_{j+1})$ et on remarque que $|z(t_{j+1}) - z(t_j)| = r$.
Montrons que la procédure de construction des z_k s'arrête. En effet, sinon comme la suite (t_j) est croissante et bornée par 1, t_j converge vers $t_\infty \leq 1$. Or il existe J tel que pour tout $j \geq J$, $z(t_j) \in B(z(t_\infty), r/2)$. donc $|z(t_{j+1}) - z(t_j)| < r$ ce qui est contradictoire avec la propriété vue ci-dessus.
Montrons que cette suite (z_j) vérifie les propriétés du lemme 4.13. On a $B(z_k, 3r) \subset Y$ car $r_0 \leq R_0/3$. Il reste à démontrer que $B(z_{k+1}, r) \subset B(z_k, 2r)$. Si $|z - z_{k+1}| < r$ alors $|z - z_k| \leq |z - z_{k+1}| + |z_{k+1} - z_k| < 2r$. □

Nous pouvons appliquer le lemme 4.13 à $y_0 = (t_1, x_1)$ et $y_1 = (t_2, x_2)$ et $Y = X_{T_2} =]0, T_2[\times\Omega$. On prend r assez petit pour que $B((t_1, x_1), 3r) \subset X_{T_2}$. On note $a_j = \|F\|_{H^1(B(z_j,r))}$ et $A = \|F\|_{H^1(X_{T_2})}$. On applique l'inégalité (4.1.43) en remplaçant u par F. Par des majorations de normes évidentes ($B(z_j, r) \subset B(z_{j-1}, 2r)$) on obtient,

$$a_j \leq C a_{j-1}^{\mu} A^{1-\mu}.$$

A priori μ dépend de j mais nous pouvons choisir comme μ le plus petit de tous les μ car on a $a_j \leq A$.
Par récurrence on obtient

$$a_j \leq C^{\frac{1-\mu^j}{1-\mu}} a_0^{\mu^j} A^{1-\mu^j}.$$

Ce qui donne pour $j = K$ l'inégalité (4.4.2) avec $\alpha = \mu^K$. □

Troisième étape.

Comme on a $B((t_1, x_1), r) \subset B$, de (4.4.1) et (4.4.2), pour tout $(t_2, x_2) \in X_{T_1T_2}$, il existe $C > 0$ et $\mu > 0$ tels que

$$\|F\|_{H^1(B((t_2,x_2),r))} \leq C\|\partial_t F(0, \cdot)\|^{\mu}_{L^2(\omega)} \|F\|^{1-\mu}_{H^1(X_{T_2})} \tag{4.4.3}$$

Notons $Y_\varepsilon = \{(t, x) \in X_{T_0T_1},\ d(x, \mathbb{R}^n \setminus \Omega) \geq \varepsilon\}$. Par compacité on peut recouvrir Y_ε par un nombre fini de boules de type $B((t^k_2, x^k_2), r_k)$ pour lesquelles il existe $C_k > 0$, $\mu_k > 0$

$$\|F\|_{H^1(B((t^k_2,x^k_2),r))} \leq C_k\|\partial_t F(0, \cdot)\|^{\mu_k}_{L^2(\omega)} \|F\|^{1-\mu_k}_{H^1(X_{T_2})}. \tag{4.4.4}$$

On pose $\mu = \inf \mu_k > 0$ et comme $\|F\|_{H^1(B((t^k_2,x^k_2),r))} \leq \|F\|_{H^1(X_{T_2})}$ on a également

$$\|F\|_{H^1(B((t^k_2,x^k_2),r))} \leq C_k\|\partial_t F(0, \cdot)\|^{\mu}_{L^2(\omega)} \|F\|^{1-\mu}_{H^1(X_{T_2})}. \tag{4.4.5}$$

Comme $Y_\varepsilon \subset \bigcup_k B((t^k_2, x^k_2), r)$, en additionnant les inégalités (4.4.5), on a prouvé qu'il existe $C > 0$ et $\mu > 0$ tels que,

$$\|F\|_{H^1(Y_\varepsilon)} \leq C\|\partial_t F(0, \cdot)\|^{\mu}_{L^2(\omega)} \|F\|^{1-\mu}_{H^1(X_{T_2})}. \tag{4.4.6}$$

Quatrième étape.

Soit $x \in \partial\Omega$, on peut trouver un changement de variables dans lequel localement près de x, Ω est défini par $y_d > 0$ ($d = n + 1$, $y_1 = t$ attention il y a un changement de notations par rapport à l'étape où le bord était $t = 0$) et où l'opérateur $\partial^2_t + \Delta$ s'écrit $\partial^2_d + P$ où P est un opérateur elliptique de la forme $\sum_{j,k=1}^{d-1} a_{jk}(y)\partial_j\partial_k$. On peut alors appliquer le théorème 4.12.

Après le changement de variables inverse, il existe donc un voisinage V de (t,x), $C>0$, $\mu>0$ et $\varepsilon>0$ tels que

$$\|F\|_{H^1(V\cap X_{T_2})} \leq C\|F\|^{\mu}_{H^1(Y_\varepsilon)}\|F\|^{1-\mu}_{H^1(X_{T_2})}. \tag{4.4.7}$$

Il suffit de prendre ε assez petit pour que l'image de $B^+(y_0,r)$ soit contenu dans Y_ε, ce qui est possible.
En appliquant l'inégalité (4.4.6), on obtient de (4.4.7) qu'il existe $C>0$, $\mu>0$ (ce μ est différent de (4.4.6) et (4.4.7)) et $\varepsilon>0$ tels que

$$\|F\|_{H^1(V\cap X_{T_2})} \leq C\|\partial_t F(0,\cdot)\|^{\mu}_{L^2(\omega)}\|F\|^{1-\mu}_{H^1(X_{T_2})}. \tag{4.4.8}$$

Par compacité on peut recouvrir $[T_0,T_1]\times\partial\Omega$ par un nombre fini de V_k vérifiant (4.4.8) et il existe $C_k>0$ et $\mu_k>0$ tels que

$$\|F\|_{H^1(V_k\cap X_{T_2})} \leq C_k\|\partial_t F(0,\cdot)\|^{\mu_k}_{L^2(\omega)}\|F\|^{1-\mu_k}_{H^1(X_{T_2})}. \tag{4.4.9}$$

Comme $\|F\|_{H^1(V_k\cap X_{T_2})} \leq \|F\|_{H^1(X_{T_2})}$, en posant $\mu=\inf\mu_k$ et $C=\sup C_k$, on obtient de (4.4.9) qu'il existe $C>0$ et $\mu>0$ tels que

$$\|F\|_{H^1(V_k\cap X_{T_2})} \leq C\|\partial_t F(0,\cdot)\|^{\mu}_{L^2(\omega)}\|F\|^{1-\mu}_{H^1(X_{T_2})}. \tag{4.4.10}$$

Notons $Z_\varepsilon=\{(t,x)\in X_{T_0T_1},\ d(x,\mathbb{R}^n\setminus\Omega)\leq\varepsilon\}$. Pour ε assez petit, $Z_\varepsilon\subset\bigcup_k V_k$, donc en additionnant toutes les inégalités (4.4.10), on obtient qu'il existe $C>0$, $\mu>0$ et $\varepsilon>0$ tels que

$$\|F\|_{H^1(Z_\varepsilon)} \leq C\|\partial_t F(0,\cdot)\|^{\mu}_{L^2(\omega)}\|F\|^{1-\mu}_{H^1(X_{T_2})}. \tag{4.4.11}$$

L'inégalité (4.4.6) est vraie pour tout ε, en prenant le μ le plus petit apparaissant dans (4.4.6) ou dans (4.4.11), en utilisant le fait que $\|F\|_{H^1(Y_\varepsilon)}\leq\|F\|_{H^1(X_{T_2})}$ et $\|F\|_{H^1(Z_\varepsilon)}\leq\|F\|_{H^1(X_{T_2})}$ et en notant que $X_{T_0T_1}=Y_\varepsilon\cup Z_\varepsilon$, on obtient (3.3.2) en additionnant les inégalités (4.4.6) et (4.4.11). $\square$

4.5 Exercices.

Exercice 1.

Soit $u\in\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^2)$ à support compact dans $\{(t,x)\in\mathbb{R}^2,\ t\geq 0\}$.
On pose $v(t,x)=t^{-\gamma}u(x,t)$. On note $(f|g)=\int_{\mathbb{R}^2}f(t,x)\overline{g(t,x)}dxdt$ et $\|f\|^2=(f|f)$.

1) Calculer $\partial_t u$ et $\partial_t^2 u$ en fonction de $\partial_t v$ et $\partial_t^2 v$, puis écrire $t^{-\gamma}(\partial_t^2 u + \partial_x^2 u)$ comme opérateur agissant sur v.

2) Calculer $2\,\mathrm{Re}\left(\partial_t^2 v | \dfrac{2\gamma\partial_t v}{t}\right)$.

3) Calculer $2\,\mathrm{Re}\left(\partial_x^2 v | \dfrac{2\gamma\partial_t v}{t}\right)$.

4) Calculer $2\,\mathrm{Re}\left(\dfrac{\gamma^2 v}{t^2} | \dfrac{2\gamma\partial_t v}{t}\right)$.

5) Calculer $-3\left(\partial_t^2 v + \partial_x^2 v + \dfrac{\gamma^2 v}{t^2} | \dfrac{\gamma v}{t^2}\right)$.

6) Déduire des questions précédentes qu'il existe $C > 0$ et $\gamma_0 > 0$ tels que pour tout $\gamma \geq \gamma_0$ et toute $v \in \mathcal{C}^\infty$ à support compact dans $\{(t,x) \in \mathbb{R}^2,\ t \geq 0\}$ on a

$$\gamma^3 \left\|\frac{v}{t^2}\right\|^2 + \gamma \left\|\frac{\partial_t v}{t}\right\|^2 + \gamma \left\|\frac{\partial_x v}{t}\right\|^2 \leq C \left\|\partial_t^2 v + \partial_x^2 v + \frac{2\gamma\partial_t v}{t} + \frac{\gamma^2 v}{t^2}\right\|^2$$

7) Montrer qu'il existe $C > 0$ et $\gamma_0 > 0$ tels que pour tout $\gamma \geq \gamma_0$ et tout $u \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^2)$ à support compact dans $\{(t,x) \in \mathbb{R}^2,\ t \geq 0\}$, on a

$$\gamma^3 \left\|t^{-\gamma-2} u\right\|^2 + \gamma \left\|t^{-\gamma-1}\partial_t u\right\|^2 + \gamma \left\|t^{-\gamma-1}\partial_x u\right\|^2 \leq C \left\|t^{-\gamma}(\partial_t^2 u + \partial_x^2 u)\right\|^2 \tag{4.5.1}$$

8) Soit a, b et c des fonctions bornées, soit $P = \partial_t^2 + \partial_x^2 + \dfrac{a(x,t)}{t}\partial_t + \dfrac{b(x,t)}{t}\partial_x + \dfrac{c(x,t)}{t^2}$ et soit $w(x,t)$ une fonction $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^2)$ à support dans $\{(x,t) \in \mathbb{R}^2,\ t \geq x^2\}$. On suppose $Pw = 0$. Soit $\chi(t) \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ telle que $\chi(t) = 1$ si $t \leq 1$, $\chi(t) = 0$ si $t \geq 2$ et $0 \leq \chi(t) \leq 1$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.
Appliquer l'inégalité (4.5.1) à $u(x,t) = \chi(t)w(x,t)$ et démontrer que $w(x,t) = 0$ pour tout (x,t) tels que $t \leq 1/2$.

9) Si, dans le cadre de la question précédente, on a $Pw = f$, démontrer une inégalité d'interpolation sur w.

Exercice 2.

Soit $u \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^2)$ à support compact dans $\{(t,x) \in \mathbb{R}^2,\ t \geq 0\}$.

On pose $v(t,x) = t^{-\gamma}u(t,x)$. On note $(f|g) = \int_{\mathbb{R}^2} f(t,x)\overline{g(t,x)}dxdt$ et $\|f\|^2 = (f|f)$.

1) Calculer $\partial_t u$ et $\partial_t^2 u$ en fonction de $\partial_t v$ et $\partial_t^2 v$, puis écrire $t^{-\gamma}(\partial_t^2 u + t\partial_x^2 u)$ comme opérateur agissant sur v.

2) Calculer $2\,\mathrm{Re}\left(\partial_t^2 v | \dfrac{2\gamma\partial_t v}{t}\right)$.

3) Calculer $2\operatorname{Re}\left(t\partial_x^2 v|\frac{2\gamma\partial_t v}{t}\right)$.

4) Calculer $2\operatorname{Re}\left(\frac{\gamma^2 v}{t^2}|\frac{2\gamma\partial_t v}{t}\right)$.

5) Calculer $-\left(\partial_t^2 v + t\partial_x^2 v + \frac{\gamma^2 v}{t^2}|\frac{\gamma v}{t^2}\right)$ et en déduire une majoration de $\gamma\left\|\frac{\partial_x v}{\sqrt{t}}\right\|^2$.

6) Déduire des questions précédentes qu'il existe $C > 0$ et $\gamma_0 > 0$ tels que pour tout $\gamma \geq \gamma_0$ et toute $v \in \mathcal{C}^\infty$ à support compact dans $\{(t,x) \in \mathbb{R}^2,\ t \geq 0\}$ on a

$$\gamma^3\left\|\frac{v}{t^2}\right\|^2 + \gamma\left\|\frac{\partial_t v}{t}\right\|^2 + \gamma\left\|\frac{\partial_x v}{\sqrt{t}}\right\|^2 \leq C\left\|\partial_t^2 v + t\partial_x^2 v + \frac{2\gamma\partial_t v}{t} + \frac{\gamma^2 v}{t^2}\right\|^2$$

7) Montrer qu'il existe $C > 0$ et $\gamma_0 > 0$ tels que pour tout $\gamma \geq \gamma_0$ et tout $u \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^2)$ à support compact dans $\{(t,x) \in \mathbb{R}^2,\ t \geq 0\}$, on a

$$\gamma^3\left\|t^{-\gamma-2}u\right\|^2 + \gamma\left\|t^{-\gamma-1}\partial_t u\right\|^2 + \gamma\left\|t^{-\gamma-1/2}\partial_x u\right\|^2 \leq C\left\|t^{-\gamma}(\partial_t^2 u + t\partial_x^2 u)\right\|^2 \tag{4.5.2}$$

8) Soit a, b et c des fonctions bornées et soit $P = \partial_t^2 + t\partial_x^2 + \frac{a(t,x)}{t}\partial_t + \frac{b(t,x)}{\sqrt{t}}\partial_x + \frac{c(t,x)}{t^2}$, montrer qu'il existe $C > 0$ et $\gamma_0 > 0$ tels que pour tout $\gamma \geq \gamma_0$ et tout $u \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^2)$ à support compact dans $\{(t,x) \in \mathbb{R}^2,\ t \geq 0\}$, on a

$$\gamma^3\left\|t^{-\gamma-2}u\right\|^2 + \gamma\left\|t^{-\gamma-1}\partial_t u\right\|^2 + \gamma\left\|t^{-\gamma-1/2}\partial_x u\right\|^2 \leq C\left\|t^{-\gamma}Pu\right\|^2 \tag{4.5.3}$$

9) Soit $w(t,x)$ une fonction $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^2)$ à support dans $\{(t,x) \in \mathbb{R}^2,\ t \geq x^2\}$. On suppose $Pw = 0$.
Soit $\chi(t) \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ telle que $\chi(t) = 1$ si $t \leq 1$, $\chi(t) = 0$ si $t \geq 2$ et $0 \leq \chi(t) \leq 1$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.
Appliquer l'inégalité (4.5.3) à $u(t,x) = \chi(t)w(t,x)$ et démontrer que $w(t,x) = 0$ pour tout (t,x) tels que $t \leq 1/2$.

Exercice 3.

On considère $P = D_t^2 - D_{x_1}^2 + (1+t)D_{x_2}^2$ où $D_t = \frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial t}$, $D_{x_j} = \frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x_j}$ pour $j = 1, 2$.
On note $(u|v) = \int u(t,x_1,x_2)\overline{v(t,x_1,x_2)}dtdx_1dx_2$.
Soit $A > 0$ à fixer plus tard, on suppose $u \in \mathcal{C}^\infty$ à support compact dans $\{|t| < \frac{1}{10A}\}$.
On pose $\varphi(t) = -t + \frac{At^2}{2}$.

1) Calculer $e^{\gamma\varphi}D_t(e^{-\gamma\varphi}u)$ et $e^{\gamma\varphi}D_t^2(e^{-\gamma\varphi}u)$.
En déduire la forme de $Qu = e^{\gamma\varphi}P(e^{-\gamma\varphi}u)$.

Dans la suite on note $Q_1u = D_t^2 - D_{x_1}^2 + (1+t)D_{x_2}^2 - \gamma^2(\varphi_t')^2$, $Q_2u = 2i\gamma\varphi_t' D_t u$ où $\varphi_t' = \frac{\partial\varphi}{\partial t}$.

2) Calculer $2\,\mathrm{Re}(D_t^2 u|2i\gamma\varphi_t' D_t u)$.

3) Calculer $2\,\mathrm{Re}(-\gamma^2(\varphi_t')^2 u|2i\gamma\varphi_t' D_t u)$.

4) Calculer $2\,\mathrm{Re}(-D_{x_1}^2 u|2i\gamma\varphi_t' D_t u)$.

5) Calculer $2\,\mathrm{Re}((1+t)D_{x_2}^2 u|2i\gamma\varphi_t' D_t u)$.

6) Déduire des calculs précédents que

$$\begin{aligned}\|(Q_1+Q_2)u\|^2 = \; & \|Q_1u\|^2 + \|Q_2u\|^2 + 2\gamma A\|D_tu\|^2 + 6\gamma^3 A\|\varphi_t' u\|^2 + 2\gamma A\|D_{x_1}u\|^2 \\ & -2\gamma A((1+t)D_{x_2}u|D_{x_2}u) - 2\gamma(\varphi_t' D_{x_2}u|D_{x_2}u)\end{aligned}$$

7) Mettre $(Q_1u|u)$ sous la forme de sommes ou différences de carrés.

8) D'après le résultat obtenu à la question 7) montrer qu'on a,

$$\left|2\gamma^3 A\|\varphi_t' u\|^2 - 2\gamma A\|D_tu\|^2 + 2\gamma A\|D_{x_1}u\|^2 - 2\gamma A((1+t)D_{x_2}u|D_{x_2}u)\right| \le 2\gamma A\|Q_1u\|\|u\|$$

9) Montrer que sur le support de u on a

$$\gamma\|D_{x_2}u\|^2 \le -2\gamma(\varphi_t' D_{x_2}u|D_{x_2}u) \text{ et } 2\gamma^3 A\|u\|^2 \le 4\gamma^3 A\|\varphi_t' u\|^2$$

En utilisant le résultat de la question 7), montrer que

$$\gamma\|D_{x_1}u\|^2 \le 2\gamma\|D_{x_2}u\|^2 + 4\gamma\|D_tu\|^2 + 4\|Q_1u\|\|u\|^2.$$

10) Déduire des questions 6), 8) et 9) que

$$\begin{aligned}\|Q_1u\|^2 + \|Q_2u\|^2 + 4\gamma A\|D_tu\|^2 + \; & 2\gamma^3 A\|u\|^2 + \frac{\gamma}{4}\|D_{x_1}u\|^2 + \frac{\gamma}{2}\|D_{x_2}u\|^2 \\ & \le \|(Q_1+Q_2)u\|^2 + \gamma\|D_tu\|^2 + \gamma(2A+1)\|Q_1u\|\|u\|\end{aligned}$$

En déduire qu'on peut choisir A assez grand tel qu'il existe $C > 0$ tel que pour tout $u \in \mathcal{C}^\infty$ à support compact dans $\{|t| < \frac{1}{10A}\}$, on a

$$\gamma^3\|u\|^2 + \gamma(\|D_tu\|^2 + \|D_{x_1}u\|^2 + \|D_{x_2}u\|^2) \le C\|(Q_1+Q_2)u\|^2$$

11) Montrer qu'il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout $v \in \mathcal{C}^\infty$ à support compact dans $\{|t| < \frac{1}{10A}\}$, on a

$$\gamma^3\|e^{\gamma\varphi}v\|^2 + \gamma(\|e^{\gamma\varphi}D_tv\|^2 + \|e^{\gamma\varphi}D_{x_1}v\|^2 + \|e^{\gamma\varphi}D_{x_2}v\|^2) \le C\|e^{\gamma\varphi}Pv\|^2.$$

Chapitre 5

Généralisations

5.1 Contrôle vers l'image de $e^{-(-\Delta)^{\alpha/2}}$.

Nous rappelons les notations du paragraphe 3.1.2, il existe une suite λ_k croissante, $0 < \lambda_0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots$ et $e_k \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ telle que $\Delta e_k = -\lambda_k^2 e_k$ où $\|e_k\|_{L^2(\Omega)} = 1$ et la suite e_k forme une base hilbertienne de $L^2(\Omega)$. Soit $\omega \subset \Omega$ un ouvert.

Théorème 5.1 *Soit $\alpha \in]1,2[$, soit $T > 0$, il existe $C > 0$ telle que pour tout $v_1 \in L^2(\Omega)$, on pose $u_1 = e^{-(-\Delta)^{\frac{\alpha}{2}}} v_1$, c'est-à-dire $u_1 = \sum_{k=0}^{\infty} b_k e^{-\lambda_k^{\alpha}} e_k$ où $(b_k) \in \ell^2$, il existe $f \in L^2(\omega \times [0,T])$ vérifiant $\|f\|_{L^2(\omega\times[0,T])} \leq C\|v_1\|_{L^2(\Omega)}$ telle que la solution du problème ,*

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{du}{dt} - \Delta u = f 1_{\omega\times[0,T]} \text{ sur } [0,T]\times\Omega \\ u|_{t=0} = 0 \\ u|_{[0,T]\times\partial\Omega} = 0 \end{array}\right. \tag{5.1.1}$$

vérifie $u(T,\cdot) = u_1$.

Corollaire 5.2 *Il existe $C > 0$ telles pour tout $u_0 \in L^2(\Omega)$, pour tout $u_1 = e^{-(-\Delta)^{\frac{\alpha}{2}}} v_1$ où $v_1 \in L^2(\Omega)$, il existe $f \in L^2(\omega \times [0,T])$ vérifiant $\|f\|_{L^2(\omega\times[0,T])} \leq C(\|u_0\|_{L^2(\Omega)} + \|v_1\|_{L^2(\Omega)})$ telle que la solution du problème ,*

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{du}{dt} - \Delta u = f 1_{\omega\times[0,T]} \text{ sur } [0,T]\times\Omega \\ u|_{t=0} = u_0 \\ u|_{[0,T]\times\partial\Omega} = 0 \end{array}\right. \tag{5.1.2}$$

vérifie $u(T,\cdot) = u_1$.

Démonstration du corollaire.
On note w_1 la solution du problème suivant,

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{dw_1}{dt} - \Delta w_1 = 0 \\ w_1|_{t=0} = u_0 \\ w_1|_{[0,T]\times\partial\Omega} = 0 \end{array}\right. \tag{5.1.3}$$

Si on trouve $f \in L^2(\omega \times [0,T])$ telle que la solution w_2 du problème,

$$\text{(5.1.4)} \qquad \begin{cases} \dfrac{dw_2}{dt} - \Delta w_2 = f 1_{\omega\times[0,T]} \text{ sur } [0,T]\times\Omega \\ w_2|_{t=0} = 0 \\ w_2|_{[0,T]\times\partial\Omega} = 0 \end{cases}$$

vérifie $w_2(T,\cdot) = u_1 - w_1(T,\cdot)$ alors $u = w_1 + w_2$ vérifie l'équation (5.1.2) et $u(T,\cdot) = u_1$. Pour cela il suffit d'appliquer le théorème 5.1, et on a $\|f\|_{L^2(\omega\times[0,T])} \le C\|w_3\|_{L^2(\Omega)}$ s'il existe $w_3 \in L^2(\Omega)$ telle que $u_1 - w_1(T,\cdot) = e^{-(-\Delta)^{\frac{\alpha}{2}}} w_3$. Or on a $u_0 = \sum_{k=0}^{\infty} a_k e_k$ et $v_1 = \sum_{k=0}^{\infty} b_k e_k$ où (a_k) et (b_k) sont dans ℓ^2. Donc

$$\text{(5.1.5)} \qquad \begin{aligned} u_1 - w_1(T,\cdot) &= \sum_{k=0}^{\infty} b_k e^{-\lambda_k^\alpha} e_k - \sum_{k=0}^{\infty} a_k e^{-T\lambda_k^2} e_k \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} (b_k - a_k e^{-T\lambda_k^2 + \lambda_k^\alpha}) e^{-\lambda_k^\alpha} e_k \end{aligned}$$

Comme $-T\lambda_k^2 + \lambda_k^\alpha \to -\infty$ quand $k \to +\infty$, il existe $C > 0$ telle que

$$\text{(5.1.6)} \qquad |b_k - a_k e^{-T\lambda_k^2+\lambda_k^\alpha}| \le |b_k| + C|a_k|.$$

Donc $w_3 = \sum_{k=0}^{\infty} (b_k - a_k e^{-T\lambda_k^2+\lambda_k^\alpha}) e_k$ est dans $L^2(\Omega)$ et $\|w_3\|_{L^2(\Omega)} \le C(\|u_0\|_{L^2(\Omega)} + \|v_1\|_{L^2(\Omega)})$. Ce qui démontre le corollaire 5.2. $\square$

Démonstration du théorème 5.1.
Nous allons reprendre la procédure de la preuve du théorème 3.17. Remarquons que trouver f telle que

$$\text{(5.1.7)} \qquad \begin{cases} \dfrac{du}{dt} - \Delta u = f 1_{\omega\times[0,T]} \text{ sur } [0,T]\times\Omega \\ u|_{t=0} = u_0 \\ u|_{[0,T]\times\partial\Omega} = 0 \\ u(T,\cdot) = 0 \end{cases}$$

est équivalent, en posant $v = e^{t\Delta}u_0 - u$, à résoudre

$$\text{(5.1.8)} \qquad \begin{cases} \dfrac{dv}{dt} - \Delta v = -f 1_{\omega\times[0,T]} \text{ sur } [0,T]\times\Omega \\ v|_{t=0} = 0 \\ v|_{[0,T]\times\partial\Omega} = 0 \\ v(T,\cdot) = e^{T\Delta}u_0 \end{cases}$$

Pour u_1 du théorème 5.1, il faudrait prendre $u_0 = \sum_{k=0}^{\infty} b_k e^{T\lambda_k^2} e^{-\lambda_k^\alpha} e_k$. Ce choix ne convient pas car un tel u_0 n'est pas dans L^2 en général.

Nous allons quand même procéder comme cela mais en découpant en fréquences. Pour ne pas avoir à suivre la norme de v_1, nous allons, sans perte de généralité supposer que $\|v_1\|_{L^2(\Omega)} = 1$, c'est-à-dire $\sum_{k=0}^{\infty} |b_k|^2 = 1$. Nous utiliserons pour ne pas compliquer les notations les constantes $C > 0$, $C' > 0$ des grandes constantes qui peuvent changer d'une ligne à l'autre et qui ne dépendent pas de n, k, et le constantes $c > 0$, $c' > 0$ pour des petites constantes qui ne dépendent pas de n, k.

Posons $v_0^n = \sum_{2^{n-1} < \lambda_j \leq 2^n} b_j e_j$. Ppour $n = 0$ il faut poser $v_0^0 = \sum_{\lambda_j \leq 1} b_j e_j$ mais on se convaint aisément que dans le raisonnement qui va suivre les basses fréquences ne posent aucuns problèmes aussi dans la suite nous ne considérerons toujours que les hautes fréquences. Posons $u_0^n = \sum_{2^{n-1} < \lambda_j \leq 2^n} b_k e^{-\lambda_j^\alpha + T\lambda_j^2} e_j$. Nous allons chercher un f (en fait f_n) vérifiant l'équation (5.1.7) avec la donnée u_0^n. Posons $T' = T - 2^{-n\beta}$ où β sera choisi plus loin. Notons u_n la solution de (5.1.7). Entre 0 et T' nous prenons $f_n = 0$, on a donc $u_n(t, \cdot) = \sum_{2^{n-1} < \lambda_j \leq 2^n} b_j e^{-\lambda_j^\alpha + (T-t)\lambda_j^2} e_j$ pour $t \in [0, T']$ en particulier nous avons $u(T', \cdot) = \sum_{2^{n-1} < \lambda_j \leq 2^n} b_j e^{-\lambda_j^\alpha + 2^{-n\beta}\lambda_j^2} e_j$.

Or si $2 < \alpha + \beta$, $-\lambda_k^\alpha + 2^{-n\beta}\lambda_j^2 \leq -\lambda_j^\alpha + \lambda_j^{2-\beta} \leq -C_0\lambda_j^\alpha + C_1 \leq -C_0' 2^{n\alpha} + C_1'$ pour des constantes $C_0 > 0, \cdots, C_1' > 0$. Il existe donc des constantes $C > 0$ et $c > 0$ telle que

$$\|u_n(T', \cdot)\|_{L^2(\Omega)} \leq Ce^{-c2^{n\alpha}}. \tag{5.1.9}$$

À partir de cette donnée, nous allons reprendre la procédure de contrôle faite dans la preuve du théorème 3.17.

Toute la construction dépend de n mais comme nous allons découper l'intervalle $[T', T]$, ce qui nous amène à introduire un paramètre k, nous allons dans la suite ne pas noter la dépendance par rapport à n de toutes les quantités introduites.

Nous posons $T_{n-1} = T'$ et pour $k \geq n$, $T_k = T' + (\sum_{n \leq j \leq k} 2^{-j\beta})(1 - 2^{-\beta})$ de sorte que $T_k \to T' + 2^{-n\beta} = T$ quand $k \to +\infty$.

Pour $k \geq n$, posons $T_k' = (1/2)(T_{k-1} + T_k) = T_{k-1} + (1/2)2^{-k\beta}(1 - 2^{-\beta})$. Sur l'intervalle $[T_{k-1}, T_k']$ nous allons contrôler les fréquences $\lambda_j \in]2^{k-1}, 2^k]$. D'après le théorème 3.16 et (3.2.22), il existe $f_k \in L^2([T_{k-1}, T_k'] \times \omega)$ un contrôle vérifiant

$$\|f_k\|_{L^2([T_{k-1}, T_k'] \times \omega)} \leq Ce^{C2^k} \|u_n(T_{k-1}, \cdot)\|_{L^2(\Omega)} \tag{5.1.10}$$

tel que la solution u_n du problème,

$$(5.1.11)\qquad \begin{cases} \dfrac{du_n}{dt} - \Delta u_n = f_k 1_{[T_{k-1},T'_k]\times\omega} \text{ sur } [T_{k-1},T'_k]\times\Omega \\ u_n|_{t=T_{k-1}} = u(T_{k-1},\cdot) \\ u|_{[0,T]\times\partial\Omega} = 0 \end{cases}$$

vérifie $u(T'_k,\cdot) = \sum_{\lambda_j>2^k} c_j e_j$ et

$$(5.1.12)\qquad \|u_n(t,\cdot)\|_{L^2(\Omega)} \le Ce^{C2^k}\|u_n(T_{k-1},\cdot)\|_{L^2(\Omega)} \text{ pour tout } t\in[T_{k-1},T'_k]$$

Pour $t \in [T'_k, T_{k+1}]$, on fait évoluer librement la solution, c'est-à-dire, on pose $u_n(t,\cdot) = e^{(t-T'_k)\Delta}u_n(T'_k,\cdot)$. On a donc d'après (5.1.12) pour $t\in[T'_k,T_{k+1}]$

$$(5.1.13)\qquad \begin{aligned} \|u_n(t,\cdot)\|_{L^2(\Omega)} &\le Ce^{-c(t-T'_k)2^{2k}}\|u_n(T'_k,\cdot)\|_{L^2(\Omega)} \\ &\le Ce^{-c(t-T'_k)2^{2k}}e^{C2^k}\|u_n(T_{k-1},\cdot)\|_{L^2(\Omega)} \end{aligned}$$

En particulier, si $1>\beta$, on a $-c2^{2k-k\beta}+C2^k \le -c'2^{2k-k\beta}+C'$,

$$(5.1.14)\qquad \|u_n(T_k,\cdot)\|_{L^2(\Omega)} \le Ce^{-c2^{k(2-\beta)}}\|u_n(T_{k-1},\cdot)\|_{L^2(\Omega)}$$

Par récurrence et d'après (5.1.9)

$$(5.1.15)\qquad \|u_n(T_k,\cdot)\|_{L^2(\Omega)} \le Ce^{-c2^{k(2-\beta)}-c'2^{n\alpha}}$$

Ce qui implique, d'après (5.1.12) et (5.1.13), que pour $t\in[T_k,T_{k+1}]$ et $\beta<1$

$$(5.1.16)\qquad \|u_n(t,\cdot)\|_{L^2(\Omega)} \le Ce^{-c2^{k(2-\beta)}-c'2^{n\alpha}}$$

et d'après (5.1.10)

$$(5.1.17)\qquad \|f_k\|_{L^2([T_{k-1},T'_k]\times\omega)} \le Ce^{-c2^{k(2-\beta)}-c'2^{n\alpha}}$$

En particulier $u_n(t,\cdot)\to 0$ dans $L^2(\Omega)$ quand $t\to T^-$. Donc u_0^n est contrôlable à 0 avec $f^n = \sum_{k\ge n} f_k$ et d'après (5.1.17) on a

$$(5.1.18)\qquad \|f^n\|_{L^2([T',T]\times\omega)} \le Ce^{-c2^{n\alpha}}$$

En posant $v_n(t,\cdot) = e^{t\Delta}u_0^n - u_n(t,\cdot)$, on a, comme pour (5.1.8), que v_n vérifie

$$(5.1.19)\qquad \begin{cases} \dfrac{dv_n}{dt} - \Delta v = -f^n 1_{\omega\times[0,T]} \text{ sur } [0,T]\times\Omega \\ v_n|_{t=0} = 0 \\ v_n|_{[0,T]\times\partial\Omega} = 0 \\ v_n(T,\cdot) = \displaystyle\sum_{2^{n-1}<\lambda_j\le 2^n} b_j e^{-\lambda_j^\alpha} e_j \end{cases}$$

Le théorème 5.1 est donc vérifié si on prend $f = -\sum_{n\geq 0} f^n$ et d'après (5.1.18) on a

$$\|f\|_{L^2([0,T]\times\omega)} \leq \|\sum_{n\geq 0} f^n\|_{L^2([0,T]\times\omega)} \leq C\sum_{n\geq 0} e^{-c2^{n\alpha}} \leq C. \tag{5.1.20}$$

et la solution u du problème (5.1.1) vérifie $u(T,\cdot) = u_1$. $\square$

5.2 Une autre inégalité d'interpolation.

Nous allons reprendre les notations du paragraphe 4.2.1, $Pu = D_d^2 + \sum_{j,k=1}^{d-1} a_{jk}(y)D_jD_k$, $Y = Y'\times]0,1[$ où Y' est un ouvert de $\mathbb{R}^{d-1}$. Nous noterons $B^+(y_0,r) = B(y_0,r)\cap\{y\in\mathbb{R}^d,\ y_d>0\}$ et pour $y_0'\in\mathbb{R}^{d-1}$, $\tilde{B}(y_0',r) = \{y'\in\mathbb{R}^{d-1},\ |y_0-y'|<r\}$.

Théorème 5.3 *Pour tout* $s\in]0,\frac{1}{2}[$ *il existe* $C>0$, *tel que pour tout* $u\in\mathcal{C}^\infty(B^+(y_0,2r))$ *vérifiant* $\operatorname{supp}(u)\subset\overline{B^+(y_0,r)}$ *alors*

$$\|u\|_{H^1(B^+(y_0,r))} \leq C\frac{\|u\|_{H^2(B^+(y_0,r))}}{\ln^s\left(2+\frac{\|u\|_{H^2(B^+(y_0,r))}}{\|Pu\|_{H^1(B^+(y_0,r))}}\right)} \tag{5.2.1}$$

Contrairement à l'inégalité du théorème 4.8, l'inégalité du théorème 5.3 ne fait pas intervenir les conditions aux bord et contrairement à l'inégalité du théorème 4.12, elle ne suppose aucune condition au bord. Le prix à payer de ces hypothèses plus faibles est que l'inégalité obtenue est de type logarithmique alors que celles obtenues précédemment étaient de type höldérienne.
La preuve repose sur deux inégalités, une inégalité de Carleman et l'inégalité de Hardy.
Rappelons tout d'abord l'inégalité de Hardy que nous allons appliquer.

Théorème 5.4 *Soit* $s\in[0,\frac{1}{2}[$, *il existe* $C>0$ *telle que pour tout* $u\in H^s(\mathbb{R}^+)$ *on a* $\left\|\frac{u}{t^s}\right\|_{L^2(\mathbb{R}^+)} \leq C\|u\|_{H^s(\mathbb{R}^+)}$.

Ici on définit $H^s(\mathbb{R}^+)$ comme la restriction à $\mathbb{R}^+$ des fonctions de $H^s(\mathbb{R})$ et $\|u\|_{H^s(\mathbb{R}^+)} = \inf(\|v\|_{H^s},\ v\in H^s(\mathbb{R}),\ v_{|\mathbb{R}^+}=u)$. Dans la suite nous noterons également u un prolongement de u à tout $\mathbb{R}$ tel que la norme de u dans $H^s(\mathbb{R})$ est équivalente à $\|u\|_{H^s(\mathbb{R}^+)}$.

Remarque 5.5 *Cette inégalité est également vraie pour* $s\in]\frac{1}{2},1]$ *si* $u\in H_0^s$ *mais nous n'utiliserons pas ici ce résultat. Pour* $s=\frac{1}{2}$ *il faut se placer dans l'espace d'interpolation entre* L^2 *et* H_0^1 *qui n'est ni* $H^{\frac{1}{2}}$ *ni* $H_0^{\frac{1}{2}}$. *Nous ne voulons pas ici entrer plus en détail dans ces subtilités.*

Nous allons appliquer une inégalité de Carleman avec un poids un peu différents de celui utilisé au chapitre 4. On reprend les mêmes notations que celles utilisées au chapitre 4 mais on pose $\psi(y) = -y_d$. On a $H=1$ (voir (4.1.28) pour la définition de H). À partir de (4.2.43) on obtient l'inégalité de Carleman suivante, en utilisant les notations définies en (4.2.3)et (4.2.2),

$$
(5.2.2)\qquad \begin{aligned}
&\exists \beta > 0,\ \gamma_0 > 0,\ C > 0,\ \forall \gamma > \gamma_0,\\
&\forall u \in \mathcal{C}^\infty(B^+(y_0, 2r) \text{ vérifiant } \operatorname{supp}(u) \subset \overline{B^+(y_0, r)}\\
&\gamma^3 \|e^{\gamma\varphi} u\|^2 + \gamma \|e^{\gamma\varphi} Du\|^2 \leq C \left(\|e^{\gamma\varphi} Pu\|^2 + \gamma^3 |(e^{\gamma\varphi} u)_{|y_d=0}|^2 + \gamma |(e^{\gamma\varphi} Du)_{|y_d=0}|^2 \right)
\end{aligned}
$$

Soit $\varepsilon > 0$ qu'on fixera plus tard, on a d'après (5.2.2) et en minorant φ par $\varphi(\varepsilon)$ sur $\{\varepsilon \leq y_d\}$ et en majorant φ par $\varphi(r)$ sur $\{y_d \leq r\}$,

$$
(5.2.3)\qquad e^{2\gamma\varphi(\varepsilon)} \|u\|^2_{H^1(\varepsilon \leq y_d)} \leq C e^{2\gamma\varphi(r)} \|Pu\|^2 + C\gamma^3 e^{2\gamma\varphi(0)} (|u_{|y_d=0}|^2 + |(Du)_{|y_d=0}|^2)
$$

On a $\varphi(0) - \varphi(\varepsilon) = \frac{1-e^{\beta\varepsilon}}{\beta} \leq -\frac{\varepsilon}{2}$ si $\beta\varepsilon$ est assez petit, et par la formule de trace, on a

$$
|u_{|y_d=0}|^2 + |(Du)_{|y_d=0}|^2 \leq C \|u\|^2_{H^2}
$$

On en déduit de (5.2.3), en utilisant la majoration $\gamma^3 \leq C \dfrac{e^{\varepsilon\gamma/2}}{\varepsilon^3}$ que

$$
(5.2.4)\qquad \|u\|^2_{H^1(\varepsilon \leq y_d)} \leq C e^{2\gamma C} \|Pu\|^2 + \frac{C}{\varepsilon^3} e^{-\gamma\varepsilon/2} \|u\|^2_{H^2}
$$

On optimise cette inégalité en γ en prenant γ tel que $e^{\gamma(2C+\varepsilon/2)} = \dfrac{\|u\|^2_{H^2}}{\varepsilon^3 \|Pu\|^2}$. Ce choix n'est possible que si $e^{\gamma_0(2C+\varepsilon/2)} < \dfrac{\|u\|^2_{H^2}}{\varepsilon^3 \|Pu\|^2}$. Supposons cette condition satisfaite pour le moment, on a alors en prenant ce γ dans (5.2.4),

$$
(5.2.5)\qquad \begin{aligned}
\|u\|^2_{H^1(\varepsilon \leq y_d)} &\leq C' \frac{\|u\|_{H^2}^{\frac{2C}{2C+\varepsilon/2}} \|Pu\|^{\frac{2\varepsilon}{2C+\varepsilon/2}}}{\varepsilon^{\frac{3}{2C+\varepsilon/2}}}\\
&\leq C' \left(\varepsilon^{\frac{-A}{\varepsilon}} \|Pu\|^2 \right)^{\frac{\varepsilon}{2C+\varepsilon/2}} \left(\varepsilon^{2s} \|u\|^2_{H^2} \right)^{\frac{C}{2C+\varepsilon/2}}
\end{aligned}
$$

où $2s < 1$ et $A = 3 + 2Cs$. En remarquant que pour tout $\delta \in]0,1[$ il existe B telle que $\varepsilon^{\frac{-A}{\varepsilon}} = e^{\frac{-A\ln\varepsilon}{\varepsilon}} \leq e^{\frac{B}{\varepsilon^\delta}}$, on obtient de (5.2.5),

$$
(5.2.6)\qquad \|u\|^2_{H^1(\varepsilon \leq y_d)} \leq C' \left(e^{\frac{B}{\varepsilon^\delta}} \|Pu\|^2 + \varepsilon^{2s} \|u\|^2_{H^2} \right)
$$

On remarque que si $\dfrac{\|u\|^2_{H^2}}{\varepsilon^3 \|Pu\|^2} \leq e^{\gamma_0(2C+\varepsilon/2)}$ l'inégalité (5.2.6) est triviale.
On a par l'inégalité de Hardy du théorème 5.4,

$$\|u\|_{H^1(y_d\le\varepsilon)} \le \varepsilon^s\left(\left\|\frac{u}{y_d^s}\right\| + \left\|\frac{Du}{y_d^s}\right\|\right) \le C\varepsilon^s\|u\|_{H^{s+1}} \le C\varepsilon^s\|u\|_{H^2} \tag{5.2.7}$$

De (5.2.6) et (5.2.7), on obtient

$$\|u\|_{H^1} \le C'\left(e^{\frac{B}{\varepsilon^\delta}}\|Pu\| + \varepsilon^s\|u\|_{H^2}\right) \tag{5.2.8}$$

On choisit $\varepsilon = \dfrac{\beta^{\frac{1}{\delta}}}{\left(\frac{1}{2}\ln\frac{\|u\|_{H^2}}{\|Pu\|}\right)^{\frac{1}{\delta}}}$ si $\dfrac{\|u\|_{H^2}}{\|Pu\|}$ est assez grand et on obtient en remplaçant ε par ce choix dans (5.2.8) l'inégalité du théorème 5.3 car $\|u\|_{H^2}^{1/2}\|Pu\|^{1/2}$ se majore par le terme de droite si $\dfrac{\|u\|_{H^2}}{\|Pu\|}$ est assez grand . Si $\dfrac{\|u\|_{H^2}}{\|Pu\|}$ est petit l'inégalité (5.2.1) est triviale. $\square$

Annexe A

APPENDICES

A.1 Redressement simultané du bord et de l'opérateur

Soit $P = \sum_{j,k=1}^{d} a_{jk}(x)\partial_j\partial_k + \sum_{j=1}^{d} a_j(y)\partial_j + a_0(y)$. Les applications a_{jk}, a_j sont supposées $\mathcal{C}^\infty$ dans un voisinage d'un point $x_0 \in \mathbb{R}^d$. On note $p(x,\xi) = \sum_{j,k=1}^{d} a_{jk}(x)\xi_j\xi_k$. On suppose a_{jk} à valeurs réelles, $a_{jk} = a_{kj}$ et la forme quadratique $p(x_0,\xi)$ définie positive.
Soit φ une application $\mathcal{C}^\infty$ dans un voisinage de x_0 et on suppose $d\varphi(x_0) \neq 0$. On note $S = \{x,\ \varphi(x) = \varphi(x_0)\}$ qui est une surface près de x_0 et $S^+ = \{x,\ \varphi(x) \geq \varphi(x_0)\}$.

Théorème A.1 *Supposons S non caractéristique pour p c'est-à-dire $p(x_0, d\varphi(x_0)) \neq 0$, alors il existe V un voisinage de x_0, et un changement de variables $\mathcal{C}^\infty$, $\chi(x) = y$ tel que,*

1. *$\chi(x_0) = 0$.*
2. *$\chi(S^+ \cap V) = \{y_d \geq 0\} \cap \chi(V)$ et $\chi(S \cap V) = \{y_d = 0\} \cap \chi(V)$.*
3. *Dans le système de coordonnées y, P s'écrit $\partial_d^2 + \sum_{j,k=1}^{d-1} b_{jk}(y)\partial_j\partial_k + \sum_{j=1}^{d} b_j(y)\partial_j + b_0(y)$, où b_{jk}, b_j sont $\mathcal{C}^\infty$ dans $\chi(V)$.*
4. *En notant $q(y,\eta) = \eta_d^2 + \sum_{j,k=1}^{d-1} b_{jk}(y)\eta_j\eta_k$, la forme quadratique $q(0,\eta)$ est définie positive.*

Démonstration.
La preuve va se faire par une succession de changement de variables. Pour ne pas introduire trop de notations, à chaque étape les variables originales s'appellerons "x" et les variables d'arrivées s'appellerons "y", et le changement de variables s'appellera χ. Rappelons que si on a $\chi_k(x) = y_k$ un changement de variables, on a $\partial_{x_j} = \sum_{k=1}^{d}(\partial_{x_j}\chi_k)\partial_{y_k}$. En notant $D\chi$ la matrice de la différentielle de χ, on a $\xi = {}^t(D\chi)\eta$, ce qui donne la formule pour $q(y,\eta) = p(\chi^{-1}(y), {}^t(D\chi)(\chi^{-1}(y))\eta)$. En particulier le fait que la forme q soit définie positive

est évidente. Le théorème ne tient pas compte des termes d'ordre 1 et 0, dans la suite nous ne les noterons pas, quand nous écrivons P s'écrit sous telle forme, cela veut dire modulo des termes d'ordre 1 et 0.

Première étape.

Quitte à faire une permutation de coordonnées x_j on peut supposer que $\varphi'_{x_d}(x_0) \neq 0$. On note $x_0 = (x_1^0, \cdots, x_d^0)$, et on fait le changement de variables $y_j = x_j - x_j^0$ pour $j = 1, \cdots, d-1$ et $y_d = \varphi(x) - \varphi(x_0)$. On vérifie à l'aide du théorème du difféomorphisme local que c'est un changement de variables dans un voisinage V de x_0, que $\chi(x_0) = 0$ et que $\chi(S^+ \cap V) = \{y_d \geq 0\} \cap \chi(V)$ et $\chi(S \cap V) = \{y_d = 0\} \cap \chi(V)$.
On est donc, après cette étape, dans la situation du théorème A.1 avec en plus $x_0 = 0$, $S = \{x_d = 0\}$ et $\varphi(x) = x_d$.

Deuxième étape.

Dans cette étape nous allons écrire P dans les nouvelles variables sous la forme $\partial_{y_d}^2 + \sum_{j=1}^{d-1} b_{jd}(y)\partial_{y_j}\partial_{y_d} + \sum_{j,k=1}^{d-1} b_{jk}(y)\partial_{y_j}\partial_{y_k}$.
Nous voulons donc que $q(y, e_d) = 1$ où $e_d = (0, \cdots, 0, 1)$, c'est-à-dire $p(x, {}^t(D\chi)(x)e_d) = 1$. Il suffit de trouver χ tel que $\sum_{jk=1}^{d} a_{jk}(\partial_d\chi_j)(\partial_d\chi_k) = 1$. On prend par exemple $\partial_d\chi_j = 0$ pour $j = 1, \cdots, d-1$ et $\partial_d\chi_d(x) = 1/\sqrt{a_{dd}(x)}$, ce qui est réalisé par $\chi_j(x) = x_j$ pour $j = 1, \cdots, d-1$ et $\chi_d(x) = \int_0^{x_d} 1/\sqrt{a_{dd}(x)}dx_d$. On a utilisé le fait que $a_{dd}(0) \neq 0$ et cela implique que $\sqrt{a_{dd}(x)}$ et $1/\sqrt{a_{dd}(x)}$ sont $\mathcal{C}^\infty$ dans un voisinage de 0. On vérifie que χ est un changement de variables et que, $\{x_d = 0\}$ et $\{x_d \geq 0\}$ se transforment respectivement en $\{y_d = 0\}$ et $\{y_d \geq 0\}$.
Après ces deux étapes nous sommes dans la situation du théorème A.1 avec en plus $x_0 = 0$, $S = \{x_d = 0\}$, $S^+ = \{x_d \geq 0\}$ et P de la forme $\partial_{x_d}^2 + \sum_{j=1}^{d-1} a_{jd}(x)\partial_{x_j}\partial_{x_d} + \sum_{j,k=1}^{d-1} a_{jk}(x)\partial_{x_j}\partial_{x_k}$.

Troisième étape.

Nous pouvons récrire P de la forme suivante

$$(\partial_{x_d} + (1/2)\sum_{j=1}^{d-1} a_{jd}(x)\partial_{x_j})^2 + \sum_{j,k=1}^{d-1} b_{jk}(x)\partial_{x_j}\partial_{x_k}, \tag{A.1.1}$$

les b_{jk} se déduisent des a_{jk} par des formules sans importance dans la suite.
Nous allons maintenant redresser le champ de vecteurs $\partial_{x_d} + \sum_{j=1}^{d-1} b_j(x)\partial_{x_j}$ où on a noté $b_j = a_{jd}/2$. On considère la solution de l'équation différentielle suivante,

$$\left\{\begin{array}{l} \dot{x}_j = b_j \text{ pour } j = 1, \cdots, d-1 \\ \dot{x}_d = 1 \\ x_j(0) = y_j \text{ pour } j = 1, \cdots, d-1 \\ x_d(0) = 0 \end{array}\right. \tag{A.1.2}$$

Nous notons $x(s; y_1, \cdots, y_{d-1})$ cette solution. Pour simplifier les écritures nous allons écrire $y' = (y_1, \cdots, y_{d-1})$. Nous allons définir χ^{-1} en posant $\chi^{-1}(y) = x(y_d; y')$. Nous avons d'une part que ∂_{y_d} se transforme en $\partial_{x_d} + \sum_{j=1}^{d-1} b_j(x)\partial_{x_j}$ car $\dot{x}(y_d; y') = \partial_{y_d}(\chi^{-1})(y) = (b_1, \cdots, b_{d-1}, 1)$, et d'autre part $\partial_{y_j} x_d(s; y') = 0$ pour $j = 1, \cdots, d-1$ car $x_d(s, y') = 1$ et $x_d(0, y') = 0$ donc $\partial_{y_j} x_d(s; y')$ vérifie le système

$$\text{(A.1.3)} \qquad \begin{cases} \dfrac{d(\partial_{y_j} x_d)}{ds}(s; y') = 0 \\ \partial_{y_j} x_d(0; y') = 0 \end{cases}$$

Par unicité de la solution de (A.1.3) on a $\partial_j x_d(s; y') = 0$. Il est facile de vérifier que les champs ∂_{y_j} pour $j = 1, \cdots, d-1$ se transforme en champ $\sum_{k=1}^{d-1} (\partial_{y_j} x_k(y_d; y'))\partial_{x_k}$, on remarque que $(\partial_{y_j} x_k(y_d; y'))_{1 \le j,k \le d-1}$ est une matrice inversible car pour $y_d = 0$ cette matrice est l'identité d'après les condition initiale de (A.1.2). Les champs ∂_{x_j} peuvent donc s'écrire sous la forme $\sum_{k=1}^{d-1} c_{kj}(y)\partial_{y_k}$. D'après la forme de P (A.1.1), on obtient la forme de P annoncé dans le théorème A.1. On a également que $\{y_d = 0\}$ et $\{y_d = 0\}$ se transfoment respectivement en $\{x_d = 0\}$ et $\{x_d = 0\}$ grâce aux choix des conditions initiales de (A.1.2) et $\dot{x}_d = 1$ implique que $y_y > 0$ équivalent à $x_d > 0$ pour y proche de 0.

A.2 Inégalité de Hardy

Commençons tout d'abord par démontrer l'inégalité de Hardy classique. Nous démontrerons ensuite l'inégalité de Hardy citée au théorème 5.4

Lemme A.2 *Posons pour $f \in L^2(\mathbb{R}^+)$, et pour $x > 0$, $Tf(x) = \dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^x f(t)dt$ alors*

$$\|Tf\|_{L^2(\mathbb{R}^+)} \le 2\|f\|_{L^2(\mathbb{R}^+)}$$

Remarque A.3 *On peut récrire ce lemme en posant $f = u'$ et si $u(0) = 0$, $\|\dfrac{u}{t}\|_{L^2(\mathbb{R}^+)} \le 2\|u'\|_{L^2(\mathbb{R}^+)}$. Ce qui donne l'inégalité de théorème 5.4 et justifie la remarque 5.5 par un théorème d'interpolation. Nous allons donner ci-dessous une démonstration directe du théorème 5.4 sans utiliser d'argument d'interpolation.*

Démonstration du lemme A.2
Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz et en écrivant $Tf(x) = \dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^x t^{\frac{1}{4}} f(t) t^{-\frac{1}{4}} dt$ on a,

$$\begin{aligned} |Tf(x)|^2 &\le \frac{1}{x^2}\int_0^x t^{-\frac{1}{2}}dt \int_0^x t^{\frac{1}{2}}|f(t)|^2 dt \\ &\le \frac{1}{x^2} 2x^{\frac{1}{2}} \int_0^x t^{\frac{1}{2}}|f(t)|^2 dt = 2x^{-\frac{3}{2}} \int_0^x t^{\frac{1}{2}}|f(t)|^2 dt \end{aligned}$$

Puisque $x \geq t$ dans l'intégrale, en utilisant le théorème de Fubini, on a,

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} |Tf(x)|^2 dx &\leq 2\int_{\mathbb{R}^+} t^{\frac{1}{2}} |f(t)|^2 \int_t^{+\infty} x^{-\frac{3}{2}} dx dt \\ &\leq 2\int_{\mathbb{R}^+} t^{\frac{1}{2}} |f(t)|^2 \left[-2x^{-\frac{1}{2}}\right]_{x=t}^{x=+\infty} dt \\ &\leq 4\int_{\mathbb{R}^+} |f(t)|^2 dt\end{aligned}$$

Ce qui prouve le lemme. □

Démonstration du théorème 5.4.
Notons $\hat{u}$ la transformée de Fourier de u et $\mathcal{F}^{-1}$ la transformée de Fourier inverse.
Notons $u_0 = \mathcal{F}^{-1}(\mathbf{1}_{\{|\xi|\leq 2\}}\hat{u})$ et pour $n \geq 1$, $u_n = \mathcal{F}^{-1}(\mathbf{1}_{\{2^n<|\xi|\leq 2^{n+1}\}}\hat{u})$.
On a $u = \sum_{n\geq 0} u_n$. On rappelle que $\|u\|_{H^s}^2 = \int_{\mathbb{R}} (1+|\xi|^2)^s |\hat{u}(\xi)|^2 d\xi \sim \sum_{n\geq 0} 2^{2ns}\|u_n\|_{L^2}^2$.

Lemme A.4 *Avec les notations ci-dessus, Il existe* $C > 0$ *tel que pour tout* $n \geq 0$ *on a* $\|u_n\|_{L^\infty} \leq C2^{\frac{n}{2}}\|u_n\|_{L^2}$.

Démonstration.
Faisons la preuve pour $n \geq 1$, pour $n = 0$ la preuve ci-dessous s'adapte facilement. Soit χ une fonction $\mathcal{C}^\infty$ telle que $\chi(s) = 1$ si $\frac{1}{2} \leq |s| \leq 4$ et $\chi(s) = 0$ si $|s| \leq \frac{1}{4}$ ou $5 \leq |s|$. Notons $\tilde{\chi} = \mathcal{F}^{-1}(\chi)$. Avec ce choix on vérifie que $\chi(2^{-n}\xi)\hat{u}_n(\xi) = u_n(\xi)$. On a donc $2^n\tilde{\chi}(2^n x)*u_n = u_n$ et comme $\chi \in \mathcal{S}$, $\tilde{\chi} \in \mathcal{S}$. On a en appliquant une inégalité classique sur la convolution,

$$\|u_n\|_{L^\infty} \leq \|2^n\tilde{\chi}(2^n x) * u_n\| \leq \|2^n\tilde{\chi}(2^n x)\|_{L^2}\|u_n\|_{L^2} \leq C2^{\frac{n}{2}}\|u_n\|_{L^2}$$

car on trouve, par un changement de variable, $\|2^n\tilde{\chi}(2^n x)\|_{L^2} = C2^{\frac{n}{2}}$. □

Pour simplifier les notations on note $\|\cdot\| = \|\cdot\|_{L^2}$, $\sum_n = \sum_{n=0}^{+\infty}$ et $\sum_{k\leq n} = \sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{k=0}^{n}$.

On a

$$\left\|\frac{u}{t^s}\right\| \leq \left\|\sum_n \frac{u_n}{t^s}\right\| \leq C\sum_{k\leq n}\int_{\mathbb{R}} \frac{|u_n||u_k|}{t^{2s}} = A_1 + A_2 + A_3 \tag{A.2.1}$$

où A_1 est l'intégrale sur $|t| \leq 2^{-n}$, A_2, l'intégrale sur $2^{-n} \leq |t| \leq 2^{-k}$ et A_3 l'intégrale sur $2^{-k} \leq |t|$.
On a en utilisant le lemme A.4,

$$A_1 \leq C\sum_{k\leq n}(2^{\frac{n}{2}}\|u_n\|)(2^{\frac{k}{2}}\|u_k\|)\int_{|t|\leq 2^{-n}} \frac{1}{t^{2s}}dt \leq C\sum_{k\leq n}(2^{ns}\|u_n\|)(2^{ks}\|u_k\|)2^{-(\frac{1}{2}-s)(n-k)} \tag{A.2.2}$$

On choisit $0 < \varepsilon < \frac{1}{2} - s$ et on a, en appliquant le lemme A.4 et l'inégalité de Cauchy-Schwarz,

$$\begin{aligned}
A_2 &\le C \sum_{k\le n} (2^{\frac{k}{2}}\|u_k\|) \int_{2^{-n}\le|t|\le 2^{-k}} \frac{|u_n|}{t^{2s}} dt \\
&\le C \sum_{k\le n} (2^{\frac{k}{2}}\|u_k\|) 2^{n(s-\varepsilon)} \int_{2^{-n}\le|t|\le 2^{-k}} \frac{|u_n|}{t^{s+\varepsilon}} dt \\
&\le C \sum_{k\le n} (2^{\frac{k}{2}}\|u_k\|) 2^{n(s-\varepsilon)} \|u_n\| \left(\int_{2^{-n}\le|t|\le 2^{-k}} \frac{1}{t^{2s+2\varepsilon}} dt \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\le C \sum_{k\le n} (2^{\frac{k}{2}}\|u_k\|) 2^{n(s-\varepsilon)} \|u_n\| 2^{k(s+\varepsilon-\frac{1}{2})} \\
&\le C \sum_{k\le n} (2^{ks}\|u_k\|)(2^{ns}\|u_n\|) 2^{-\varepsilon(n-k)}
\end{aligned} \tag{A.2.3}$$

Par Cauchy-Schwarz et en minorant $|t|$ par 2^{-k}, on a,

$$A_3 \le C \sum_{k\le n} 2^{2ks}\|u_n\|\|u_k\| \le C \sum_{k\le n} (2^{ks}\|u_k\|)(2^{ns}\|u_n\|) 2^{-s(n-k)} \tag{A.2.4}$$

En prenant $\delta > 0$ tel que $\delta \le s$ et $\delta < \frac{1}{2} - s$ de (A.2.1), (A.2.2), (A.2.3) et (A.2.4), on a

$$\left\| \frac{u}{t^s} \right\| \le C \sum_{k\le n} (2^{ks}\|u_k\|)(2^{ns}\|u_n\|) 2^{-\delta(n-k)} \tag{A.2.5}$$

Posons $a_k = 2^{ks}\|u_k\|$, on a d'après (A.2.5) et Cauchy-Schwarz,

$$\left\| \frac{u}{t^s} \right\| \le C \sum_k a_k \sum_n a_n 2^{-\delta|n-k|}. \le C \left(\sum_k a_k^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_k \left(\sum_n a_n 2^{-\delta|n-k|} \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \tag{A.2.6}$$

Or

$$\left(\sum_n a_n 2^{-\delta|n-k|} \right)^2 \le \left(\sum_n a_n^2 2^{-\delta|n-k|} \right) \left(\sum_{n\in\mathbb{Z}} 2^{-\delta|n-k|} \right) \le C \sum_n a_n^2 2^{-\delta|n-k|}$$

d'où

$$\sum_k \left(\sum_n a_n 2^{-\delta|n-k|} \right)^2 \le \sum_n a_n^2 \sum_{k\in\mathbb{Z}} 2^{-\delta|n-k|} \le C \sum_n a_n^2. \tag{A.2.7}$$

De (A.2.6) et (A.2.7), on obtient

$$\left\| \frac{u}{t^s} \right\| \leq C \sum_n a_n^2 \leq C \|u\|_{H^s}^2$$

d'après la définition de a_n et de l'équivalence de la norme H^s avec $\sum_n a_n^2$. $\square$

Index

Bibliographie

[1] Brézis, H. *Analyse fonctionnelle.* Masson 1983.

[2] Fursikov A. ; Imanuvilov O. Yu. *Controllability of evolution equations* vol. 34, Seoul National University, Korea, 1996, Lecture Notes.

[3] Hörmander L. *Linear Partial Differential Operators*, Springer-Verlag, 1963.

[4] Hörmander L. *The Analysis of Partial Differential Operators*, Springer-Verlag, vol. 4, 1985.

[5] Jerison, D. ; Lebeau G. *Nodals sets of sums of eigenfunctions*, Harmonic analysis and partial differential equations (Chicago 1996), Chicago Lectures in Math. 223-239.

[6] Kalman, R.E., Falb, P.L., Arbib,M.A. *Topics in mathematical system theory*, McGraw-Hill Book Co., New york-Toraonto, Ont.-London 1969.

[7] Lebeau G. ; Robbiano L. *Contrôle exact de l'équation de la chaleur*, Comm. Partial Differential Equations **20** (1995) 335-356.

[8] Lebeau G. ; Zuazua E. *Null-controllability of a system of linear thermoelasticity*, Arch. Rational Mech. Anal. **141** (1998) 197-329.

[9] Lions, J.-L. *Contrôlabilté exact, perturbations et stabilisation de système distribués*. Masson 1988.

[10] Miller L. *On the controllability of anomalous diffusions generated by fractional laplacian*, Mathematics of Control, Signals and Systems **3** (2006) 260-271.

[11] Phung, K.-D. *Remarques sur l'observabilité pour l'équation de Laplace*, ESAIM Control Optim. Calc. Var. **9** (2003) 621-635.

[12] Saut, J.-C. ; Scheurer B. *Unique continuation for some evolution equations*, J. Differential Equations **66** (1987) 118-139.