Université de Versailles-Saint-Quentin en Yvelines

Mémoire des travaux en vue d'obtenir une

Habilitation à Diriger des Recherches

Spécialité : Mathématiques

Contribution à l'étude des singularités des schémas de dimension deux et trois en caractéristique résiduelle positive

présenté par

Olivier Piltant [1]

[1] Laboratoire de Mathématiques LMV UMR 8100, Université de Versailles, 45, avenue des États-Unis, 78035 Versailles Cedex, France. *email :* `piltant@math.uvsq.fr`

Table des matières

1 Liste des publications.

1.1 Travaux présentés dans ce document.

[H11] Cossart V., Piltant O., Characteristic polyhedra of singularities without completion, *Math. Ann.* **361** (2015), no. 1-2, 157-167.

[H10] Cossart V., Piltant O., Resolution of singularities of threefolds in mixed characteristic : case of small multiplicity, *Rev. R. Acad. Cienc. Exactas Fís. Nat. Ser. A Math. RACSAM* **108** (2014), no. 1, 113-151.

[H9] Piltant O., An axiomatic version of Zariski's patching theorem, *Rev. R. Acad. Cienc. Exactas Fís. Nat. Ser. A Math. RACSAM* **107** (2013), no. 1, 91-121.

[H8] Cossart V., Piltant O., Resolution of singularities of threefolds in positive characteristic. II. Artin-Schreier and purely inseparable coverings, *J. Algebra* **321** (2009), no. 1, 1836-1976.

[H7] Cossart V., Piltant O., Resolution of singularities of threefolds in positive characteristic. I. Reduction to local uniformization on Artin-Schreier and purely inseparable coverings, *J. Algebra* **320** (2008), no. 3, 1051-1082.

[H6] Campillo A., Piltant O., Reguera López A., Cones of curves and of line bundles "at infinity", *J. Algebra* **293** (2005), no. 2, 513-542.

[H5] Cutkosky S.D., Piltant O., Ramification of valuations, *Adv. Math.* **183** (2004), no. 1, 1-79.

[H4] Piltant O., On the Jung method in positive characteristic, *Proceedings of the International Conference in Honor of Frédéric Pham (Nice, 2002), Ann. Inst. Fourier* **53** (2003), no. 4, 1237-1258.

[H3] Piltant O., On unique factorization in semigroups of complete ideals, *Commutative algebra (Grenoble/Lyon, 2001), Contemp. Math.* **331** (2003), Amer. Math. Soc., Providence, RI, 267-294.

[H2] Campillo A., Piltant O., Reguera López A., Cones of curves and of line bundles on surfaces associated with curves having one place at infinity, *Proc. London Math. Soc.* **84** (2002), no. 3, 559-580.

[H1] Cutkosky S.D., Piltant O., Monomial resolutions of morphisms of algebraic surfaces, *Comm. in Algebra, in honor of R. Hartshorne* **28** (2000), no. 12, 5935-5959.

1.2 Article soumis.

[A7] Cossart V., Piltant O., Resolution of singularities of arithmetical threefolds II, hal-01089140, 283 pages.

1.3 Autres publications.

[A6] Cossart V., Piltant O., Reguera A.J., Invariants of the graded algebras associated to divisorial valuations dominating a rational surface singularity, *EMS Series of Congress Reports*, in Valuation Theory in Interaction (Proceedings Intl Conf. on Valuations, Segovia 2011) (2014), 148-166.

[A5] Piltant O., Singularidades de ecuaciones algebraicas, valoraciones y espacio de valoraciones, notes de cours rédigées par M. Fernández Duque, in “V Escuela Doctoral Intercontinental de Matemáticas PUCP-UVA 2012”, *Pontificia Univ. Católica del Perú*, Lima (2012), 91-122.

[A4] Cossart V., Piltant O., Reguera López A., Divisorial valuations dominating rational surface singularities, *Fields Inst. Comm.* **32** (2002), 89-102.

[A3] Cossart V., Galindo C., Piltant O., Un exemple effectif de gradué non noethérien associé à une valuation divisorielle, *Ann. Inst. Fourier* **50** (2000), no. 1, 105-112.

[A2] Cossart V., Piltant O., Reguera López A., On isomorphisms of blowing-ups of complete ideals of a rational surface singularity, *Manuscripta Math.* **98** (1999), 65-73.

[A1] Piltant O., Frobenius pour les sommes de Selberg, *Math. Annalen.* **303** (1995), 435-456.

1.4 Thèse de doctorat.

[Th] Piltant O., Algèbres graduées associées aux valuations et Frobenius pour les sommes de Selberg, Thèse de Doctorat, Ecole Polytechnique, 9 décembre 1994.

2 Résumé.

Ce mémoire de synthèse est une présentation succincte de l'essentiel de mes travaux de recherche depuis l'année 2000. J'y ai inclus ceux qui concernent l'étude des singularités en caractéristique positive, qu'il s'agisse de leur objectif principal [H4,7,8,10,11] ou simplement qu'ils apportent une contribution significative en caractéristique positive [H1,2,3,5,6,9].

Le chapitre trois introduit le problème de Résolution des Singularités ainsi que les principaux outils algébriques utilisés dans les travaux que je présente ici. Il s'agit de la théorie des valuations, de celle des idéaux complets et de l'éclatement.

Le chapitre quatre regroupe les développements basés sur la théorie des idéaux complets dans les surfaces régulières, dûe à O. Zariski. Celle-ci permet essentiellement d'étudier la géométrie birationnelle au-dessus d'un germe régulier de surface $(\mathcal{S}, s)$, sans éclater et en toute caractéristique.

Les articles [H1,4,5] concernent l'étude locale de la ramification d'un morphisme génériquement fini $(\mathcal{S}_2, s_2) \to (\mathcal{S}_1, s_1)$ de telles surfaces, pour l'essentiel en collaboration avec D. Cutkosky (U. Missouri). Si en égale caractéristique zéro un tel morphisme peut être modifié par éclatements de points en une application monomiale $(\mathcal{S}'_2, s'_2) \to (\mathcal{S}'_1, s'_1)$, ceci n'est plus vrai en général en caractéristique positive. L'obstruction provient du défaut en théorie des valuations, c'est-à-dire du fait que l'inégalité fondamentale

$$[L : K] \geq \sum e_i f_i$$

de la théorie de la ramification est en général stricte. L'article [H5] fait le point -et en toute dimension- sur la situation en égale caractéristique zéro et décrit celle des surfaces en caractéristique positive.

Les articles [H2,6] concernent l'étude des points bases d'un pinceau de courbes à l'infini dans le plan projectif $\mathbb{P}^2$, en collaboration avec A. Campillo et A. Reguera (U. Valladolid). Ils s'appuient sur la construction des racines approchées d'Abhyankar. Celle-ci permet, en caractéristique zéro, de calculer le semigroupe de Weierstrass d'une courbe ayant une seule place à l'infini de manière analogue au calcul du semigroupe d'une branche plane. Il est montré que cette analogie local-global s'étend à la théorie des idéaux complets. L'article [H6] va plus loin en étudiant systématiquement les pinceaux à l'infini et en introduisant le groupe de Mordell-Weil de la courbe générique. On obtient par exemple l'inégalité de Kaliman en caractéristique positive.

Enfin, [H3] traite quelques cas de calcul de semigroupes d'idéaux complets en dimension trois et donne des résultats de structure pour les semigroupes à factorisation unique ou semiunique.

Le chapitre cinq regroupe les résultats plus récents autour de la désingularisation en dimension trois, pour l'essentiel en collaboration avec V. Cossart (U. Versailles). Ils s'inscrivent dans le cadre de la conjecture de Grothendieck sur l'existence de Résolution des Singularités pour les schémas noethériens réduits et quasi-excellents.

Les articles [H7,9] montrent diverses applications à la désingularisation des théorèmes de recollement de Zariski et d'approximation galoisienne d'Abhyankar. Le premier est un ingrédient essentiel de la preuve de la Résolution en dimension trois, le second permet d'attaquer de nombreux problèmes de Résolution des Singularités (champs de vecteurs, formes différentielles, factorisation des morphismes birationnels en particulier) par leur version valuative ou Uniformisation Locale.

L'article [H11] contient un résultat important sur le polyèdre caractéristique de Hironaka : celui-ci peut se calculer sans complétion formelle ni même hensélisation dans les espaces réguliers excellents et en toute caractéristique. Il s'agit d'un instrument puissant pour étudier les variations d'invariants numériques associés à ce polyèdre (leur constructibilité, semi-continuité).

L'article [H8] donne la preuve de la désingularisation pour les variétés algébriques de dimension trois en caractéristique positive. Elle étend le théorème d'Abhyankar (1966) aux corps de base k avec $[k : k^p] < \infty$ et aux petites caractéristiques $p = 2, 3, 5$. Au-delà du résultat, il a permis de faire une synthèse de nombreuses difficultés à prendre en compte pour approcher la conjecture de Grothendieck. Un premier pas en caractéristique mixte est donné dans [H10].

La section Perspectives contient essentiellement des perspectives *a posteriori* qui ont été développées dans la prépublication [A7]. J'y ai ajouté quelques commentaires sur la ramification sauvage et sur la désingularisation.

3 Les notions de base.

Une grande partie de l'activité de recherche exposée dans ce mémoire concerne le problème de Résolution des Singularités. Parmi les outils algébriques utilisés dans l'approche de ce problème figurent l'éclatement, la théorie des valuations et celle des idéaux complets. Dans ce chapitre, je rappellerai brièvement la génèse de ces notions et quelques faits essentiels qui s'y rattachent.

Soit (A, M, k) un anneau local noethérien de dimension $d \geq 0$. Un système minimal de générateurs de M est noté $(u_1, \ldots, u_n)$ et appelé système minimal de coordonnées de $\mathcal{X} = \mathrm{Spec}A$. On dit que A est régulier si

$$\dim_k M/M^2 = d.$$

Tout système minimal de générateurs est alors appelé système régulier de paramètres, abrégé dans ce qui suit en s.r.p. Le complété de A pour sa topologie M-adique est noté $\hat{A}$, son groupe des unités par $A^\times$.

Soit $\mathcal{X}$ un schéma noethérien. Le lieu régulier de $\mathcal{X}$ est noté

$$\mathrm{Rég}\mathcal{X} := \{x \in \mathcal{X} : \mathcal{O}_{\mathcal{X},x} \text{ est régulier}\} \subseteq \mathcal{X}.$$

De même, on appelle lieu singulier de $\mathcal{X}$ son complémentaire

$$\mathrm{Sing}\mathcal{X} := \mathcal{X} \backslash \mathrm{Rég}\mathcal{X}$$

Définition 3.1. Soit $\mathcal{X}$ un schéma noethérien réduit. Une résolution des singularités (ou désingularisation) de $\mathcal{X}$ est un morphisme propre et birationnel $\pi : \widetilde{\mathcal{X}} \to \mathcal{X}$ tel que :
(i) $\mathrm{Rég}\widetilde{\mathcal{X}} = \widetilde{\mathcal{X}}$, et
(ii) π induit un isomorphisme $\pi^{-1}(\mathrm{Rég}\mathcal{X}) \simeq \mathrm{Rég}\mathcal{X}$.

On remarque qu'une désingularisation n'existe pas forcément. En effet, on constate que :
(A) $\mathrm{Sing}\mathcal{X}$ n'a pas forcément une structure de sous-schéma fermé. Il existe par exemple des courbes noethériennes intègres dont le lieu singulier est un ensemble infini.
(B) si $\mathcal{X} = \mathrm{Spec}A$, où A est local, il est faux en général que $\hat{\mathcal{X}} = \mathrm{Spec}\hat{A}$ est réduit.

Ces deux faits sont à l'origine de la notion d'anneaux quasi-excellents et excellents introduite par A. Grothendieck dans [49] 7.8 et 7.9. L'existence d'une résolution des singularités -précisément d'un morphisme propre et birationnel satisfaisant le (i) ci-dessus- est conjecturée par A. Grothendieck dans *ibid.* (7.9.6) pour les schémas noethériens réduits et quasi-excellents.

Cette conjecture a été démontrée pour l'essentiel par H. Hironaka [51] pour les schémas d'égale caractéristique zéro (voir aussi [12][21][22][96]). Elle est ouverte lorsque $\dim\mathcal{X} \geq 4$ en caractéristique résiduelle positive. Pour les variétés algébriques, on peut citer parmi les articles récents sur le sujet [18][19][23][55][56][63][64][77]. Ma contribution à ce problème est présentée dans la section 5.3.

A. Grothendieck insiste sur le rôle important joué par la Résolution des Singularités dans l'étude homologique et homotopique des schémas et par l'intérêt qu'il confère à la catégorie des anneaux et des schémas excellents.

Rappelons ici seulement que des techniques fructueuses sont disponibles pour étudier les schémas réguliers. On peut penser par exemple au théorème des syzygies, à un meillleur comportement du calcul différentiel et de la théorie de l'intersection, à la structure de fibration que possède leur espace d'arcs. La Résolution des Singularités permet alors d'utiliser ces techniques modulo une projection : le morphisme propre et birationnel π de la définition 3.1. La propriété (ii) permet alors de construire, ou de calculer des invariants du schéma singulier $\mathcal{X}$, voire du schéma régulier $\text{Rég}\mathcal{X}$.

Un résultat important dû à A.J. de Jong [60] donne une version faible de la Résolution des Singularités. Elle remplace "birationnel" par génériquement fini et surjectif dans la définition 3.1 ci-dessus et omet (ii). Ce résultat permet donc de réduire l'étude des variétés algébriques ou arithmétiques à celle des variétés régulières modulo un tel morphisme. Il permet typiquement de montrer des résultats de finitude homologique [20][85][80], mais n'est cependant pas suffisant en général pour construire des invariants associés aux singularités (un exemple est donné par le corollaire 5.7 ci-dessous).

La théorie des valuations a été employée systématiquement par O. Zariski pour fonder rigoureusement la géométrie birationnelle. Rappelons :

Définition 3.2. Soit K un corps. On appelle valuation de K un morphisme de groupes *surjectif*

$$v : K^{\times} \to (\Gamma_v, \geq),$$

où $(\Gamma_v, \geq)$ est un groupe abélien totalement ordonné, et qui satisfait l'inégalité :

$$\forall x, y \in K,\ \ xy(x+y) \neq 0 \Longrightarrow v(x+y) \geq \min\{v(x), v(y)\}.$$

On note alors

$$\mathcal{O}_v := \{x \in K^\times : v(x) \geq 0\} \cup \{0\}$$

l'anneau de valuation. C'est un anneau local dont l'idéal maximal est noté

$$M_v := \{x \in K^\times : v(x) > 0\} \cup \{0\},$$

son corps résiduel k_v.

Si $\mathcal{X}$ est un schéma noethérien réduit de composantes $\mathcal{X}_1, \dots, \mathcal{X}_c$, son anneau total des fonctions rationnelles est

$$K(\mathcal{X}) = \prod_{i=1}^{c} K(\mathcal{X}_i),$$

où $K(\mathcal{X}_i)$ est un corps. Une valuation v de $\mathcal{X}$ est une valuation v_i de l'un des $K(\mathcal{X}_i)$ dont l'anneau $\mathcal{O}_{v_i}$ domine $\mathcal{O}_{\mathcal{X}_i, x_i}$ pour un certain $x_i \in \mathcal{X}_i$.

On appelle note espace de Riemann-Zariski de $\mathcal{X}$ l'espace annelé :

$$\mathrm{Zar}(\mathcal{X}) := \{v \text{ valuation de } \mathcal{X}\}.$$

Il existe alors un isomorphisme d'espaces annelés

$$\mathrm{Zar}(\mathcal{X}) \simeq \lim_{\leftarrow} \mathcal{Y},$$

où la limite est prise sur l'ensemble des morphismes propres et birationnels $\pi : \mathcal{Y} \to \mathcal{X}$ qui identifient $K(\mathcal{X})$ et $K(\mathcal{Y})$. Cette dernière condition signifie que $\mathcal{Y}$ est identifié à l'ensemble de ses anneaux locaux dans $K(\mathcal{X}) \simeq K(\mathcal{Y})$. Cette correspondance associe :

$$v \in \mathrm{Zar}(\mathcal{X}) \mapsto (y_v \in \mathcal{Y}),$$

la famille des centres donnée par le critère valuatif de propreté. Réciproquement, toute famille $(y_\alpha \in \mathcal{Y}_\alpha)$ compatible aux projections est telle que

$$\mathcal{O}_v := \bigcup_\alpha \mathcal{O}_{\mathcal{Y}_\alpha, y_\alpha}$$

est un anneau de valuation.

Une propriété importante de l'espace $\mathrm{Zar}(\mathcal{X})$ est sa quasi-compacité [105]. Il permet notamment de définir une version locale de la Résolution des Singularités comme suit :

Définition 3.3. Soit $\mathcal{X}$ un schéma noethérien réduit et $v \in \mathrm{Zar}(\mathcal{X})$. Une uniformisation locale de v est un morphisme birationnel localement de type fini

$$\pi_v : \ (\mathcal{Y}_v, y_v) \to \mathcal{X}$$

tel que $\mathcal{O}_{\mathcal{Y}_v, y_v}$ est régulier, où $y_v \in \mathcal{Y}_v$ est le centre de v.

Tout comme la Résolution des Singularités, le problème d'Uniformisation Locale est ouvert en caractéristique résiduelle positive lorsque $\dim \mathcal{X} \geq 4$. Ce problème est considéré notamment dans [58][65][79][91][92][93]. Sa version faible correspondant au théorème de de Jong [60] a par contre été démontrée dans la plus grande généralité par O. Gabber dans [58]. La question

"Uniformisation Locale $\Longrightarrow$ Résolution des Singularités?"

a été posée par Zariski et résolue par l'affirmative en dimension au plus trois [100][106]. La section 5.1 concerne ce résultat et présente plusieurs généralisations, toutes en dimension trois.

Une première classification des valuations s'effectue par leur rang, rang rationnel et degré de transcendance résiduel :

Définition 3.4. Soit $\mathcal{X}$ un schéma noethérien réduit et $v \in \mathrm{Zar}(\mathcal{X})$. On note

$$\mathrm{rg} v := \dim \mathcal{O}_v, \ \mathrm{rr} v := \dim_{\mathbb{Q}}(\Gamma_v \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}).$$

On note $\mathrm{tr} v := \mathrm{deg.tr}(k_v | k(x_v))$, où x_v est le centre de v dans $\mathcal{X}$. La valuation v est dite divisorielle si $\mathrm{tr} v = \dim \mathcal{O}_{\mathcal{X}_i, x_v} - 1$, où v est une valuation v_i de la composante $\mathcal{X}_i$ de $\mathcal{X}$.

L'inégalité d'Abhyankar [109] s'écrit dans ce contexte sous la forme

$$\mathrm{rr} v + \mathrm{tr} v \leq \dim \mathcal{O}_{\mathcal{X}_i, x_v}. \tag{3.1}$$

Si cette inégalité est une égalité, on a alors $\Gamma_v \simeq \mathbb{Z}^{\mathrm{rr} v}$ comme groupes et $k_v | k(x_v)$ est une extension finiment engendrée. En particulier, les valuations divisorielles sont discrètes. La différence des deux membres de (3.1) reflète en général la complexité de la structure algébrique de v. Cette complexité est plus précisément reflétée par celle de l'algèbre graduée

$$\mathrm{gr}_v \mathcal{O}_{\mathcal{X}_i, x_v} := \bigoplus_{\gamma \in \Gamma_v} \frac{I_\gamma}{I_\gamma^+},$$

avec $I_\gamma := \{f \in K(\mathcal{X}_i) : v(f) \geq \gamma\}$, $I_\gamma^+ := \{f \in K(\mathcal{X}_i) : v(f) > \gamma\}$.

Pour en finir avec ces rappels sur les valuations, la théorie de la ramification joue un rôle important vis-à-vis de l'Uniformisation Locale, ou plus généralement de l'étude des morphismes de type fini de schémas noethériens réduits $f : \mathcal{Y} \to \mathcal{X}$, idée développée avant tout par S. Abhyankar [1][3][4][6][9].

Soit $L|K$ une extension finie de corps, et v une valuation de K. Soit de plus p l'exposant caractéristique de k_v, c'est-à-dire que

$$p = \begin{cases} 1 & \text{si } \operatorname{car} k_v = 0 \\ \operatorname{car} k_v & \text{si } \operatorname{car} k_v > 0 \end{cases}.$$

L'égalité fondamentale de la théorie de la ramification s'écrit

$$[L : K] = \sum_{i=1}^{g} p^{\delta(w_i|v)} [\Gamma_{w_i} : \Gamma_v][k_{w_i} : k_v], \tag{3.2}$$

où $w_1, \ldots, w_g$ sont les distinctes extensions de v à L. Les termes de défaut $p^{\delta(w_i|v)} \in \mathbb{N}$ sont en général non triviaux quand $\operatorname{car} k_v = p > 0$.

Supposons de plus $L|K$ normale et choisissons une extension w de v à L. Il existe une décomposition

$$K \subseteq K^d \subseteq K^i \subseteq K^r \subseteq K^{sep} \subseteq L \tag{3.3}$$

de l'extension $L|K$ relativement à $w|v$. L'extension de corps $K^i|K$ (resp. $K^r|K^i$; $K^{sep}|K^r$; $L|K^{sep}$) est non ramifiée (resp. abélienne d'ordre premier à p ; galoisienne à p-groupe ; purement inséparable) relativement aux extensions correspondantes de w. Ces résultats sont dûs à W. Krull [66]. Ceci simplifie notablement la description des morphismes en termes d'équations le long d'une valuation. Ces questions sont abordées notamment dans la section 4.1.

Parmi les morphismes propres et birationnels utilisés pour construire une Résolution des Singularités, l'éclatement de centre régulier joue un rôle privilégié. En effet, sa simplicité d'écriture en coordonnées permet de contrôler plus facilement le comportement d'invariants associés aux singularités. Le théorème cité de Hironaka [51] n'utilise que certains éclatements de centre régulier dits permis pour le schéma singulier $\mathcal{X}$.

Définition 3.5. Soit $\mathcal{X}$ un schéma noethérien réduit et $\mathcal{Z} \subset \mathcal{X}$ un sous-schéma régulier. L'éclatement de $\mathcal{X}$ le long de $\mathcal{Z}$ est le morphisme

$$\pi : \ \widetilde{\mathcal{X}} := \mathbf{Proj}\left(\bigoplus_{i\geq 0} \mathcal{I}_{\mathcal{Z}}^i\right) \longrightarrow \mathcal{X}.$$

Si une valuation $v \in \mathrm{Zar}(\mathcal{X})$ est donnée, le morphisme de germes

$$(\widetilde{\mathcal{X}}, \widetilde{x}) \to (\mathcal{X}, x),$$

où $x \in \mathcal{X}$ (resp. $\widetilde{x} \in \pi^{-1}(x)$) est le centre de v dans $\mathcal{X}$ (resp. dans $\widetilde{\mathcal{X}}$) est appelé éclatement local ou transformé monoïdal le long de v. Lorsque x est le point générique de $\mathcal{Z}$, on emploie la dénomination de transformé quadratique le long de v.

Le polyèdre caractéristique de Hironaka [53] est un objet combinatoire associé à un germe singulier $(\mathcal{X}, x)$. Il permet de construire des invariants de $(\mathcal{X}, x)$ et est particulièrement adapté aux calculs d'éclatement de centre régulier. La section 5.2 présente ma contribution à l'étude de ce polyèdre.

La théorie des idéaux complets fut introduite par O. Zariski dans [101]. Celle-ci a joué un rôle important dans l'étude de la géométrie birationnelle des surfaces. Parmi ses applications importantes, on peut citer la résolution des surfaces par éclatements normalisés en toute caractéristique [104][1][5][71]). Réinterprété en termes cohomologiques par M. Artin [16] et J. Lipman [69], elle a notamment contribué à l'émergence de la notion de singularité rationnelle de surface et à l'étude de la factorialité des anneaux locaux, *cf.* [16][69][48][35].

Définition 3.6. Soit A un anneau local noethérien réduit intégralement clos et $\mathcal{X} = \mathrm{Spec} A$. On dit qu'un idéal $I \subseteq A$ est intégralement clos ou complet si

$$I = \bigcap_{v} (I\mathcal{O}_v \cap A),$$

où l'intersection varie sur l'ensemble des $v \in \mathrm{Zar}(\mathcal{X})$.

Cette définition est en fait un critère valuatif qui s'énonce classiquement à l'aide de la notion de dépendance intégrale. Le résultat de Zariski ([109] appendice 5, [57]) est :

Théorème 3.1. ***(Zariski).*** *Soit (A, M, k) un anneau local régulier de dimension deux. L'ensemble $(\mathbb{I}_A, \cdot)$ des idéaux complets M-primaires de A forme un semigroupe abélien libre pour la loi usuelle de produit d'idéaux. Il existe une correspondance bijective*

$$\{\textit{valuations divisorielles centrées}\} \leftrightarrow \{\textit{idéaux complets simples}\}$$

où les idéaux complets simples sont les générateurs minimaux de $\mathbb{I}_A$.

Ce résultat permet d'étudier la géométrie birationnelle d'un germe de surface régulière $\mathcal{S} = \mathrm{Spec} A$ *sans éclater* et de manière indépendante de la caractéristique. Un résultat important dans cette direction est dû à M. Spivakovsky [90] qui calcule le gradué $\mathrm{gr}_v A$ d'une valuation v centrée dans A en termes de la configuration des droites projectives exceptionnelles de la suite quadratique associée à v. Le théorème de Zariski joue un rôle important dans les résultat exposés au chapitre suivant.

4 Idéaux complets et valuations.

Ce chapitre expose les résultats obtenus dans les articles [H1-6]. La première partie traite de questions de ramification pour les morphismes génériquement finis de surfaces algébriques. La deuxième traite d'analogues globaux à l'infini du théorème de Zariski (théorème 3.1 ci-dessus) et de quelques exemples de calcul en dimension trois.

4.1 Germes de morphismes et ramification.

Dans les articles [H1,5], en collaboration avec D. Cutkosky, et dans [H4], on considère un problème de Résolution des Singularités relatif en dimension deux. L'algorithme de Zariski permet de construire une désingularisation des surfaces quasi-excellentes par éclatements normalisés successifs du lieu singulier de $\mathcal{X}$ [71]. Plus précisement :

Théorème 4.1. ***(Lipman).***
Soit $\mathcal{X}$ une surface intègre normale et quasi-excellente. Il existe une suite finie

$$\mathcal{X} =: \mathcal{X}_0 \longleftarrow \mathcal{X}_1 \longleftarrow \cdots \longleftarrow \mathcal{X}_m,$$

où $\mathcal{X}_i \longrightarrow \mathcal{X}_{i-1}$ est l'éclatement normalisé d'un point singulier $x_{i-1} \in \mathcal{X}_{i-1}$, $1 \leq i \leq m$, telle que $\mathcal{X}_m$ est régulière.

Considérons maintenant un morphisme

$$f:\ \mathcal{Y} \to \mathcal{X} \tag{4.1}$$

propre et surjectif de telles surfaces. Il induit donc une extension finie des corps de fonctions correspondants $K(\mathcal{Y})|K(\mathcal{X})$. En appliquant la proposition précédente à $\mathcal{X}$ et à $\mathcal{Y}$, on obtient des surfaces régulières notées respectivement $\mathcal{X}_m$ et $\mathcal{Y}_n$ et une application rationnelle :

$$\mathcal{Y}_n \cdots \longrightarrow \mathcal{X}_m.$$

Quitte à résoudre les indéterminations de cette application, on se ramène alors à étudier le cas où $\mathcal{X}$ et $\mathcal{Y}$ sont régulières. Bien sûr, l'expression locale du morphisme f de (4.1) peut encore être très compliquée et celle-ci peut être à nouveau simplifiée par des éclatements de points.

Une méthode dûe à Akbulut et King [14] pour les surfaces réelles permet de définir un algorithme qui simplifie ces expressions locales. Soit maintenant

$\mathcal{X}|k$ une surface algébrique régulière, où k est un corps algébriquement clos de caractéristique zéro. Le conoyau de

$$f^*\Omega^2_{\mathcal{X}|k} \longrightarrow \Omega^2_{\mathcal{Y}|k}$$

est défini par l'annulation de l'idéal jacobien $J(f)$ et définit le lieu singulier $\Sigma(f) \subset \mathcal{Y}$. Son image

$$C(f) := f(\Sigma(f)) \subset \mathcal{X}$$

est le lieu critique de f. En appliquant la résolution des courbes planes, on se ramène modulo des éclatements de points au cas où

$$E := C(f) \text{ et } F := f^{-1}(C(f))$$

sont de pure dimension un et à croisements normaux.

Soit $y \in \mathcal{Y}$ un point fermé et $x := f(y) \in \mathcal{X}$. On note (x_1, x_2) et (y_1, y_2) des coordonnées locales bien choisies respectivement en x et y, de telle sorte que

$$E \subseteq \mathrm{div}(x_1x_2),\ \ F \subseteq \mathrm{div}(y_1y_2).$$

Un calcul élémentaire donne alors l'expression locale suivante en coordonnées :

$$\text{(1-pt)} \left\{ \begin{array}{lcl} x_1 & = & y_1^a \\ \\ x_2 & = & y_1^b y_2 + P(y_1) \end{array} \right. \qquad \text{(2-pt)} \left\{ \begin{array}{lcl} x_1 & = & y_1^{a_1} y_2^{a_2} \\ \\ x_2 & = & y_1^{b_1} y_2^{b_2} + P(y_1^{\frac{a_1}{e}} y_2^{\frac{a_2}{e}}) \end{array} \right.$$

avec $P \in k[t]$ et pour certains entiers

$$a_1, a_2, b_1, b_2, e, \gcd(a_1, a_2) = e, a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0.$$

La première expression est valable seulement lorsque $F = \mathrm{div}(y_1)$ en y (1-points), la deuxième est générale, en particulier lorsque $F = \mathrm{div}(y_1y_2)$ en y (2-points). Il est alors élémentaire d'analyser le comportement de ces expressions par éclatement de point. On obtient un diagramme

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{Y} & \xleftarrow{\pi} & \mathcal{Y}' \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{X} & \xleftarrow{\sigma} & \mathcal{X}' \end{array} \tag{4.2}$$

où σ, π sont des éclatements de points, tel que $f' :\ \mathcal{Y}' \to \mathcal{X}'$ est un morphisme toroïdal relativement aux diviseurs

$$E' := C(f') \text{ et } F' := {f'}^{-1}(C(f')).$$

L'article [H1] est un premier pas vers l'extension de ces résultats à la caractéristique $p > 0$. En effet, les calculs élémentaires précédents ne sont plus valables puisque les dérivations annulent les puissances p-ièmes apparaissant dans les équations. En considérant le cas de dimension un et d'une équation

$$x = y^p \gamma(y),\ \ \gamma(y) \in k[[y]],\ \ \gamma(0) = 1, \tag{4.3}$$

on constate évidemment que le résultat de toroïdalisation ci-dessus ne peut être vrai sans une hypothèse de ramification modérée. En interprétant l'entier $|a_1 b_2 - a_2 b_1|$ ci-dessus comme un indice de ramification pour une certaine valuation de rang deux de $K(\mathcal{Y})$, on obtient dans un premier temps :

Proposition 4.2. ***([H1] théorèmes 1 et 2).***
Soit $f:\ \mathcal{Y} \to \mathcal{X}$ un morphisme propre et surjectif de surfaces algébriques lisses définies sur un corps parfait k de caractéristique $p > 0$. On suppose que l'extension de corps $K(\mathcal{Y})|K(\mathcal{X})$ est modérément ramifiée relativement à toute valuation divisorielle.

Il existe un diagramme (4.2) tel que f' est un morphisme toroïdal relativement aux diviseurs E' et F'.

Ce résultat pose la base des travaux [H4,5]. En effet, il montre la toroïdalisation des morphismes de surfaces, c'est-à-dire la construction de f' ci-dessus tel que

$$f'^{*}\Omega^2_{\mathcal{X}'|k}(logE') \longrightarrow \Omega^2_{\mathcal{Y}'|k}(logF') \tag{4.4}$$

soit un isomorphisme, lorsque tout diviseur de $K(\mathcal{Y})$ est modérément ramifié. On attend alors au moins un résultat de simplification du lieu singulier $\Sigma(f)$ lorsque la ramification sauvage apparaît.

Dans cette optique, l'article [H5] commence par réinterpréter en termes de ramification des valuations le résultat important de D. Cutkosky [37] de monomialisation des morphismes en caractéristique zéro. Soit

$$f:\ (\mathcal{Y}, y) \to (\mathcal{X}, x)$$

un germe de morphisme dominant de k-variétés algébriques intègres de même dimension $n \geq 1$. Le morphisme f est donc génériquement fini. On considère une valuation w de $(\mathcal{Y}, y)$ et on note v sa restriction à $K := K(\mathcal{X})$, $L := K(\mathcal{Y})$. Si car$k = 0$, on peut désingulariser $\mathcal{X}$ et $\mathcal{Y}$ au centre de la valuation. Ecrivons

$$(\mathcal{X}, x) = \mathrm{Spec}R,\ \ (\mathcal{Y}, y) = \mathrm{Spec}S,\ \ R \subseteq S \subseteq \mathcal{O}_w,$$

avec R et S réguliers.

Définition 4.1. Soit $R \subseteq S$ une inclusion locale d'anneaux locaux réguliers de même dimension $n \geq 1$, essentiellement de type fini sur un corps k. On dit que $S|R$ est monomiale s'il existe des s.r.p. $(x_1, \ldots, x_n)$ de R et $(y_1, \ldots, y_n)$ de S et des expressions

$$x_i = \delta_{ij} \prod_{j=1}^{n} y_j^{a_{ji}}, \ \delta_{ij} \in S \text{ inversible},$$

tels que $\det A \neq 0$, où $A := (a_{ij})$.

Cette définition naturelle est celle d'une carte toroïdale centrée lorsque k est algébriquement clos de caractéristique zéro. En caractéristique résiduelle positive, elle est satisfaite dans la situation $n = 1$ de (4.3). Nous démontrons :

Théorème 4.3. ***([H5] théorème 6.1).***
On suppose que $\mathrm{car}k = 0$. *Il existe des suites de transformés monoïdaux* $R \subseteq R'$ *le long de* v *et* $S \subseteq S'$ *le long de* w *telles que* $S'|R'$ *est monomiale et*

(1) $\kappa(S') \cdot k_v = k_w$, $[\kappa(S') : \kappa(R')] = [k_w : k_v]$ *;*

(2) on a $n' = \dim R' = \dim S' = n - \mathrm{tr} v$ *et un isomorphisme*

$$\mathbb{Z}^{n'}/A'\mathbb{Z}^{n'} \simeq \Gamma_w/\Gamma_v, \ \mathbf{e}_i \mapsto w(y_i),$$

où A' *est la matrice de la définition 4.1 correspondant à* $S'|R'$.

Ce résultat permet donc d'exprimer les deux invariants discrets usuels associés à la ramification de $w|v$, à savoir

$$f(w|v) = [k_w : k_v] \text{ et } \Gamma_w/\Gamma_v \tag{4.5}$$

en termes d'un morphisme de modèles locaux reguliers $R' \subseteq S'$. Le théorème suivant est un résultat d'algébrisation de la théorie de la ramification dans les corps de fonctions de caractéristique zéro :

Théorème 4.4. ***([H5] théorème 6.3).***
L'extension d'anneaux de valuation $\mathcal{O}_w|\mathcal{O}_v$ *est limite inductive filtrante d'extensions* $S^{(\alpha)}|R^{(\alpha)}$ *satisfaisant la conclusion du théorème 4.3.*

Enfin, un résultat de permanence pour les paires $S^{(\alpha)}|R^{(\alpha)}$ comme ci-dessus est également démontré ([H5] théorème 6.1).

La dernière section de [H5] considère le cas d'un corps algébriquement clos de caractéristique $p > 0$ en dimension $n = 2$. Du point de vue technique, les résultats suivants requièrent des techniques de calcul de gradué associé aux valuations sans éclatement, développées par M. Spivakovsky [90]. La différence essentielle avec la caractéristique zéro est l'apparition du défaut dans l'égalité fondamentale de la ramification (3.2). En effet, on a

Théorème 4.5. ***([H5] théorèmes 7.3 et 7.35).***
Supposons $n = 2$, k algébriquement clos de caractéristique $p > 0$ et $L|K$ séparable. La conclusion des théorèmes 4.3 et 4.4 reste valide si $w|v$ est sans défaut, i.e. si $\delta(w|v) = 0$.

Dans le cas où $\delta(w|v) > 0$, on obtient également un résultat d'algébrisation pour $w|v$. L'énoncé est le suivant :

Théorème 4.6. ***([H5] théorème 7.33).***
Supposons $n = 2$, k algébriquement clos de caractéristique $p > 0$, $L|K$ séparable et $\delta(w|v) > 0$. Il existe des suites de transformés quadratiques $R \subseteq R'$ le long de v et $S \subseteq S'$ le long de w, et des systèmes réguliers de paramètres (x_1, x_2) de R' et (y_1, y_2) de S' tels que

$$\left\{\begin{array}{lcl} x_1 & = & \gamma y_1^{ap^\alpha} \\ x_2 & = & y_1^b g \end{array}\right. \tag{4.6}$$

avec $\gamma \in S'$ inversible, $\mathrm{ord}(g \frac{S'}{(y_1)}) = p^\beta$ *et $p \nmid a$. De plus*

(1) si $\Gamma_v \neq p\Gamma_v$, on a

$$b = 0,\ \Gamma_w/\Gamma_v \simeq \mathbb{Z}/ap^\alpha\mathbb{Z} \text{ et } \delta(w|v) = \beta;$$

(2) si $\Gamma_v = p\Gamma_v$, on a

$$\Gamma_w/\Gamma_v \simeq \mathbb{Z}/a\mathbb{Z} \text{ et } \delta(w|v) = \alpha + \beta.$$

Enfin, il est montré que la conclusion du théorème 4.5 est en général fausse lorsque $\delta(w|v) > 0$ ([H5] théorème 7.38). Il s'agit donc d'un contre-exemple à l'existence de monomialisation (forte) pour les morphismes de surfaces en caractéristique positive. Les articles [45][42] ont par la suite approfondi ces résultats.

L'article [H4] s'intéresse à l'application de la théorie de la ramification à l'Uniformisation Locale. Soit $(\mathcal{Y}, y)$ un germe de surface normale définie sur un corps k algébriquement clos. On note $m \geq 1$ sa multiplicité. Il existe une projection séparable et quasi-finie, de degré local m :

$$f: \ (\mathcal{Y}, y) \to (\mathcal{X}, x) = \mathrm{Spec} R$$

avec R local régulier de dimension deux.

On considère une valuation w de $(\mathcal{Y}, y)$ et on note v sa restriction à $K := \mathrm{Fr}(R)$. Pour construire une uniformisation locale S' de w, on étudie classiquement le lieu critique $C(f) \subset \mathcal{X}$ qu'on peut rendre à croisements normaux par éclatements de points. C'est la base de la méthode de Jung [61]. Celle-ci construit alors un nouveau germe de morphisme quasi-fini

$$f': \ (\mathcal{Y}', y') \to (\mathcal{X}', x') = \mathrm{Spec} R' \tag{4.7}$$

avec $(\mathcal{Y}', y')$ normale, de multiplicité $m' \leq m$, et qui est toroïdal lorsque $m' = m$ et $\mathrm{car} k = 0$. On construit alors facilement S' ou même une désingularisation de $(\mathcal{Y}', y')$.

Lorsque $\mathrm{car} k = p > 0$, ce principe de démonstration s'effondre car f' n'est plus en général toroïdal. On peut néanmoins espérer simplifier les singularités de $(\mathcal{Y}, y)$ par cette méthode même si le revêtement f' est compliqué. En effet, l'existence d'une désingularisation de $(\mathcal{Y}, y)$ entraîne que $(\mathcal{Y}', y')$ n'a plus que des singularités dites sandwich (éclatées d'un germe régulier) dès que $(\mathcal{X}, x)$ a été suffisamment éclaté. Rappelons qu'une singularité $(\mathcal{X}, x)$ est dite torique s'il existe une variété torique X_Σ, $s \in X_\Sigma$ et un isomorphisme

$$\hat{\mathcal{O}}_{\mathcal{X},x} \simeq \hat{\mathcal{O}}_{X_\Sigma,s}.$$

La question principale posée dans [H4] est :

Question 4.7. ***([H4] définition 4.1).***
Supposons que $\mathrm{car} k = p > 0$. *Existe-t'il un germe de morphisme (4.7) tel que* $(\mathcal{Y}', y')$ *a une singularité torique ?*

Cette question est à ma connaissance toujours ouverte, du fait de la grande difficulté introduite par la ramification sauvage. Dans la lignée de [H5], je montre :

Théorème 4.8. ***([H4] théorèmes 5.3, 6.5 et 7.1).***
La question 4.7 a une rponse affirmative dans les cas suivants :
(1) $\delta(w|v) = 0$ *;*
(2) $\Gamma_v \not\simeq \frac{1}{p^\infty}\mathbb{Z}$ *;*
(3) $\Gamma_v \simeq \frac{1}{p^\infty}\mathbb{Z}$*,* $e(w|v) = \delta(w|v) = 1$*.*

Pour conclure cette section, je souhaite insister sur l'apport de l'article [H5] dans la thématique "valuations et singularités". En effet, il introduit à mon sens deux nouveautés importantes dans cette thématique.

D'une part, le théorème 4.3 montre un résultat de finitude en caractéristique zéro pour la ramification d'une extension de valuations $w|v$, même lorsque le groupe Γ_v ou l'extension résiduelle $k_v|k$ ne sont pas finiment engendrés. Dans le cas de caractéristique positive, le théorème 4.5 montre un résultat analogue en dimension deux lorsque $w|v$ est sans défaut. Étant donnée l'interaction importante de ces questions avec la théorie des modèles (voir par exemple [43][67][68]), ces résultats pourraient être amenés à jouer un rôle intéressant.

D'autre part, alors que le défaut $\delta(w|v)$ apparaît dans (3.2) comme un terme correctif pour obtenir cette égalité, le théorème 4.6 en donne une interprétation géométrique. En effet, il montre qu'il provient par passage à la limite d'extensions $S^{(\alpha)}|R^{(\alpha)}$ sauvagement ramifiées (4.6) et sans "défaut" apparent. Ces résultats devraient être approfondis pour produire une description quantitative du défaut en termes de groupes et d'idéaux de ramification supérieure associés à $w|v$ et définis par Zariski [109] ou encore de valuations augmentées à la Mac Lane [94][95]. Voir le chapitre de conclusion de ce mémoire.

4.2 Systèmes linéaires à l'infini.

L'article [H3], issu d'une prépublication antérieure non publiée, m'a permis d'élaborer les articles [H2][H6] en collaboration avec A. Campillo et A. Reguera. Le point de départ de ces travaux est un théorème d'Abhyankar-Moh [10][82] sur les semigroupes de Weierstrass des courbes planes avec une place à l'infini. On note k un corps algébriquement clos d'exposant caractéristique $p \geq 1$.

Définition 4.2. Soit $F \in k[x, y]$ définissant une courbe plane $C \subset \mathbb{A}^2_k$ et $\overline{C} \subset \mathbb{P}^2_k = \mathbb{A}^2_k \cup L$ sa clôture projective.

On dit que C a une place à l'infini si $\overline{C} \cap L = \{\overline{P}\}$ et si le germe $(\overline{C}, \overline{P})$ est unibranche.

Cette notions est centrale dans la série d'articles d'Abhyankar et Moh [10][11][76] (voir aussi [17]) sur les plongements $\mathbb{A}^1_k \hookrightarrow \mathbb{A}^2_k$ et les automorphismes de $k[x,y]$. On note $[X : Y : Z]$ des coordonnées projectives et $\overline{F} \in k[X,Y,Z]_d$ l'équation de $\overline{C}$. Les coordonnées sont choisies de telle manière que

$$x = \frac{X}{Z},\ y = \frac{Y}{Z}, L:\ Z = 0 \text{ et } \overline{P} = [1:0:0].$$

Rappelons que le semigroupe de Weierstrass Γ_C de C est dans ce contexte l'ensemble des pôles

$$\Gamma_C := \{\rho(g) := -v(g),\ g \in \mathcal{O}_C = k[x,y]/(F)\}$$

pour la valuation v de la branche $(\overline{C}, \overline{P})$. Le semigroupe

$$S_{\overline{C},\overline{P}} := \{v(g),\ g \in \mathcal{O}_{\overline{C},\overline{P}}\}$$

est un objet d'étude classique. Il possède un système minimal de générateurs

$$S_{\overline{C},\overline{P}} = \sum_{j=0}^{g} \mathbb{N}\overline{\beta}_j,\ \overline{\beta}_j = v(q_j), \tag{4.8}$$

où q_j est l'élément général d'un système linéaire (idéal complet)

$$I_{i_j} \subset \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2_k,\overline{P}},\ 0 \leq j \leq g.$$

En utilisant la construction explicite d'Abhyankar par racines approchées des générateurs du semigroupe d'une branche plane lorsque car$k = 0$, on obtient :

Proposition 4.9. ***(Abhyankar-Moh).***
On suppose que $p \nmid \gcd(d, \overline{\beta}_0)$ *si* car$k = p > 0$. *Il existe des polynômes* $F_1, \ldots, F_g \in k[x,y]$ *tels que*

$$d_j := \deg F_j = (q_j, L)_{\overline{P}},\ 0 \leq j \leq g,\ \text{ et } \Gamma_C = \mathbb{N}\rho(x) + \mathbb{N}\rho(y) + \sum_{j=1}^{g} \mathbb{N}\rho(f_j),$$

où f_j *est l'image de* F_j *dans* $\mathcal{O}_C$.

Il est intéressant de noter l'hypothèse sur la caractéristique nécessaire à ce résultat qui n'est plus valide en général lorsque car$k = p > 0$. Signalons les applications du calcul de Γ_C aux codes correcteurs d'erreurs [24].

L'article [H2] propose d'étendre cette analogie local-global aux idéaux complets. Pour ce faire, on introduit le pinceau de courbes $V =< \overline{F}, Z^d >$. Par éclatement de points, on peut éliminer les indéterminations de l'application rationnelle $V : \mathbb{P}^2_k \cdots \to \mathbb{P}^1_k$ définie par V. On note

$$f : X_V \longrightarrow \mathbb{P}^1_k$$

le morphisme minimal ainsi obtenu. On note

$$\mathrm{Pic}(X_V) = \bigoplus_{i=0}^{n} \mathbb{Z}[E_i], \tag{4.9}$$

où E_0 est la transformée stricte de L et les E_i sont les courbes exceptionnelles pour $\pi : X_V \to \mathbb{P}^2_k$. On note $(\Delta_0, \ldots, \Delta_n)$ la base duale de $([E_0], \ldots, [E_n])$ pour le produit d'intersection. Soient les semigroupes :

$$\left\{ \begin{array}{lcl} NE(X_V) & := & \{[D] \in \mathrm{Pic}(X_V) : D \text{ effectif}\} \\ & & \\ \widetilde{P}(X_V) & := & \{\Delta \in \mathrm{Pic}(X_V) : \Gamma(X_V, \mathcal{O}(\Delta)) \to \mathcal{O}(\Delta) \text{ surjectif}\} \end{array} \right. . \tag{4.10}$$

Le cône des courbes et le cône caractéristique d'une surface rationnelle sont des objets subtils et en général très difficiles à calculer. Ils ne sont pas en général polyédraux. Il est donc remarquable d'obtenir :

Théorème 4.10. ***([H2] théorème 2 et corollaire 7).***
Supposons que car$k = 0$. *On a :*

(1) $NE(X_V) = \bigoplus_{i=0}^n \mathbb{N}[E_i]$ *;*

(2) $\mathbb{Q}_{\geq 0}\widetilde{P}(X_V) = \bigoplus_{i=0}^n \mathbb{Q}_{\geq 0}\Delta_i$.

De plus, on a $\widetilde{P}(X_V) = \bigoplus_{i=0}^n \mathbb{N}\Delta_i$ *si et seulement si* C *est régulière et rationnelle.*

Ceci signifie que la géométrie des diviseurs sur les surfaces X_V est "la plus simple possible", puisque ces cônes sont simpliciaux.

L'article [H6] va plus loin. Il considère en effet plus généralement un pinceau

$$V =< \overline{F}, \overline{G} >\subset \Gamma(\mathbb{P}^2_k, \mathcal{O}(d)),\ d \geq 1$$

et la surface rationnelle X_V associée comme en (4.9). On suppose F et G sans facteur commun. Le cas $G = Z^d$ correspond à un pinceau dit "à l'infini". Le semigroupe des courbes $NE(X_V)$ et le semigroupe caractéristique $\widetilde{P}(X_V)$ sont encore définis par (4.10). On a également une courbe générique associée au sens des schémas :

Définition 4.3. Soit λ une indéterminée. On note $C_V \subset \mathbb{P}^2_{k(\lambda)}$ la courbe d'équation

$$\overline{F}_\lambda := \overline{F} + \lambda \overline{G} \in k(\lambda)[X, Y, Z]_d.$$

On voit facilement que C_V est géométriquement réduite et irréductible si et seulement si la courbe générale de V est réduite et irréductible. Le pinceau V est alors dit *primitif*. Dans ce cas, la normalisée $\overline{C}_V$ de C_V est la fibre générique de $f : X_V \longrightarrow \mathbb{P}^1_k$. Lorsque car$k = 0$, C_V est lisse sauf peut-être aux points base de V.

On note $\overline{P}_1, \ldots, \overline{P}_s$ les points de $\overline{C}_V$ dont l'image dans $\mathbb{P}^2_{k(\lambda)}$ est un point base de V. Leurs adhérences de Zariski $H_1, \ldots, H_s$ dans X_V sont appelés classiquement *diviseurs dicritiques* de V. La pertinence de cette construction pour l'étude des pinceaux à l'infini se voit simplement :

Lemme 4.11. *([H6])*
Soit $F \in k[x, y]$ et $V =< \overline{F}, Z^d >$ le pinceau à l'infini associé, de courbe générique C_V. Soit

$$\sigma : k[x, y] \to k[x, y]$$

un k-automorphisme. On note $F' := \sigma(F)$ et $V' :=< \overline{F'}, Z^{d'} >$ le pinceau à l'infini correspondant, de courbe générique $C_{V'}$. Alors

$$C_V \backslash \{\overline{P}_1, \ldots, \overline{P}_s\} \simeq C_{V'} \backslash \{\overline{P}'_1, \ldots, \overline{P}'_{s'}\}.$$

Ce fait montre que tout invariant associé à la courbe affine

$$U_V := C_V \backslash \{\overline{P}_1, \ldots, \overline{P}_s\}$$

est en fait un invariant modulo automorphisme polynomial σ. Il permet de plus d'associer des invariants arithmétiques à cette courbe affine générique, en particulier son groupe de Picard Pic$(\overline{C}_V)$. On redémontre alors très simplement des résultats connus -mais non triviaux- en caractéristique zéro, qu'on étend de plus lorsque car$k = p > 0$. Donnons des exemples :

Proposition 4.12. ***([H6], proposition 3 et 5).***
Soit V un pinceau primitif à l'infini. Avec les notations du lemme, on a :
(1) sont invariants modulo automorphisme polynomial σ : le nombre de diviseurs dicritiques ($s = s'$) et leurs degrés ($D_i := [\kappa(\overline{P}_i) : k(\lambda)] = [\kappa(\overline{P}'_i) : k(\lambda)]$ après renumérotation) ;
(2) $\gcd(D_1, \ldots, D_s) = p^t$ pour un certain $t \in \mathbb{N}$;
(3) $s - 1 = \sum_{\mu \in k}(n_\mu - 1) + \mathrm{rgPic}^\circ(\overline{C}_V)$, où n_μ désigne le nombre de composantes irréductibles de la courbe affine $F(x, y) + \mu = 0$.

Le (2) est un théorème dû à E. Artal [15], le (3) donne l'inégalité de S. Kaliman [62] quand on y fait $\mathrm{rgPic}^\circ(\overline{C}_V) \geq 0$, tous deux en caractéristique zéro. Mais l'apport principal de [H6] réside dans l'étude des semigroupes $NE(X_V)$ et $\widetilde{P}(X_V)$. On y considère en effet la question suivante :

Question 4.13. ***([H6] question 2).***
Soit V un pinceau primitif (non nécessairement à l'infini) tel que $\mathrm{Pic}^\circ(\overline{C}_V)$ est un groupe fini. Est-il vrai que le cône des courbes $\mathbb{Q}_{\geq 0}NE(X_V)$ est polyédral ?

Une réponse affirmative à cette question est connue dans le cas classique des pinceaux de cubiques. On voit d'autre part facilement que la réciproque est vraie, c'est-à-dire que

$$\mathbb{Q}_{\geq 0}NE(X_V) \text{ polyédral} \Longrightarrow \mathrm{Pic}^\circ(\overline{C}_V) \text{ fini.}$$

Si nous ne connaissons aucune réponse négative à la question 4.13, nous montrons en revanche :

Théorème 4.14. ***([H6], théorèmes 3 et 4).***
On suppose que $\mathrm{car}k = 0$. Soit V un pinceau primitif à l'infini. Le cône des courbes $\mathbb{Q}_{\geq 0}NE(X_V)$ est polyédral dans les deux cas suivants :
(1) C_V est lisse et $\mathrm{Pic}^\circ(\overline{C}_V)$ est un groupe fini ;
(2) $\overline{F} = \prod_{i=1}^{s} \overline{F}_i^{a_i}$, où chaque $\overline{F}_i$ définit une courbe avec une place à l'infini.
De plus le cône $\mathbb{Q}_{\geq 0}\widetilde{P}(X_V)$ est alors le dual de $\mathbb{Q}_{\geq 0}NE(X_V)$, et donc lui aussi polyédral.

L'article [H3] traite quand à lui d'idéaux complets en dimension trois. On y considère un anneau local régulier (R, M, k) de dimension $d \geq 3$, essentiellement de type fini sur un corps algébriquement clos k de caractéristique zéro. Soit $\pi : \ X \longrightarrow \mathrm{Spec}R$ une composition de n éclatements de points. On a donc

$$\mathrm{Pic}(X) \simeq \mathbb{Z}^n.$$

On note $(\mathbb{I}_X, *)$ le semigroupe d'idéaux complets M-primaires associé, à savoir :

$$\mathbb{I}_X := \{I := \pi_*\mathcal{O}(\Delta)_M : \pi^*\pi_*\mathcal{O}(\Delta) \to \mathcal{O}(\Delta) \text{ surjectif}\}.$$

La loi de produit $*$ correspond ici à la clôture intégrale du produit usuel $I * J := \overline{IJ}$. Ces semigroupes ont été introduits par J. Lipman [72] qui a montré qu'ils ne possèdent pas en général de factorisation unique comme en dimension deux (Zariski, théorème 3.1 ci-dessus). Ceci a été approfondi par D. Cutkosky [36] et A. campillo, G. González-Springerg et M. Lejeune-Jalabert [25][26]. Soient $\widetilde{E}_1, \ldots, \widetilde{E}_n$ les diviseurs exceptionnels de π. Ceux-ci sont des hypersurfaces rationnelles, éclatées de $E_i = \mathbb{P}_k^{d-1}$. Je montre :

Théorème 4.15. ***([H3] section 4).***
Supposons que $d = 3$ et que $(\mathbb{I}_X, *)$ ait factorisation unique (resp. semiunique). Alors pour tout i, $1 \leq i \leq n$, on a

$$\widetilde{P}(\widetilde{E}_i) \simeq \mathbb{N}^{n_i} \text{ (resp. } \mathbb{Q}_{\geq 0}\widetilde{P}(\widetilde{E}_i) \simeq \mathbb{Q}_{\geq 0}^{n_i}).$$

Dans ce cas, il existe des pinceaux à l'infini $V_{1,i}, \ldots V_{s_i,i}$ dans $E_i = \mathbb{P}_k^2$ et un morphisme :

$$X_{V_{1,i}} \times_{E_i} \cdots \times_{E_i} X_{V_{s_i,i}} \longrightarrow \widetilde{E}_i.$$

On ramène donc l'étude des semigroupes d'idéaux complets à factorisation unique ou semiunique à celle des semigroupes $\widetilde{P}(\widetilde{E}_i)$ ayant la même propriété, déjà construits dans [H2], théorème 3.

5 Valuations et désingularisation en dimension trois.

Ce chapitre expose les résultats obtenus dans les articles [H7-11]. La première partie traite de questions de recollement et de réduction de l'Uniformisation Locale en dimension trois. La deuxième traite du polyèdre caractéristique de Hironaka, outil important de construction d'invariants des singularités. La dernière partie traite d'Uniformisation Locale en dimension trois.

5.1 Uniformisation locale et désingularisation.

Cette section s'organise autour du théorème de recollement de Zariski [106] et d'approximation galoisienne d'Abhyankar [1][4][6]. Il s'agit de deux résultats importants de géométrie birationnelle.

Soit k un corps de caractéristique $p \geq 0$ et $\mathcal{X}|k$ une variété algébrique irréductible de dimension trois. Le théorème de Zariski montre que la Résolution des Singularités pour $\mathcal{X}|k$ se réduit non seulement à sa version locale pour la topologie de Zariski de $\mathcal{X}$, mais aussi à sa version locale pour la topologie de Zariski de la variété de Riemann-Zariski $\mathrm{Zar}(\mathcal{X})$, à savoir l'Uniformisation Locale des valuations (définition 3.3). Ceci requiert une certaine compréhension de la géométrie birationnelle, dans la mesure où il s'agit de recoller des cartes locales de modèles projectifs distincts de $K(\mathcal{X})$. Ce problème a notamment conduit Zariski à introduire la notion fructueuse de Résolution Plongée d'un idéal dans une variété régulière. Un raffinement important est montré par V. Cossart dans [32].

L'apport principal de [H9] consiste à extraire le sens géométrique du recollement en évitant toute référence à la notion usuelle de régularité. On élargit alors notablement son champ d'application. Pour ce faire, on considère une propriété de régularité "abstraite" de $K := K(\mathcal{X})$. Dans ce qui suit, $\mathcal{Y}$ désigne un modèle projectif de $K(\mathcal{X})$. Rappelons que la correspondance birationnelle identifie un tel modèle à l'ensemble de ses anneaux locaux $\mathcal{O}_{\mathcal{Y},y} \subseteq K$.

Définition 5.1. Une propriété de régularité P de K est une application

$$P : \ \{\mathcal{O}_{\mathcal{Y},y}\} \longrightarrow \{\mathrm{Sing}, \mathrm{Rég}\},$$

de l'ensemble des sous-anneaux locaux $\mathcal{O}_{\mathcal{Y},y} \subseteq K$ pour tous $\mathcal{Y}$ et $y \in \mathcal{Y}$, dans l'ensemble à deux éléments Sing(ulier) et Rég(ulier). On définit :

$$\mathrm{RégP}(\mathcal{Y}) := \{y \in \mathcal{Y} : P(\mathcal{O}_{\mathcal{Y},y}) = \mathrm{Rég}\},\ \mathrm{SingP}(\mathcal{Y}) := \mathcal{Y} \backslash \mathrm{RégP}(\mathcal{Y}).$$

Ceci permet notamment de définir une notion d'Uniformisation Locale pour P comme suit :

Définition 5.2. Soit $v \in \mathrm{Zar}(\mathcal{X})$ une valuation. Une P-uniformisation locale de v est un sous-anneau local $\mathcal{O}_{\mathcal{Y},y} \subseteq K$ comme ci-dessus tel que

$$P(\mathcal{O}_{\mathcal{Y},y}) = \mathrm{Rég},$$

où $y \in \mathcal{Y}$ est le centre de v.

Bien entendu, il est nécessaire de faire certaines hypothèses de nature gómétrique sur P pour espérer un résultat de recollement de solutions locales régulières pour P. Le résultat principal de [H9] s'énonce alors :

Théorème 5.1. ***([H9], théorèmes 2.4 et 2.5).***
Supposons que P satisfasse les axiomes (P1)-(P5) (resp. (P1)-(P6)) ci-dessous. Alors il existe un morphisme birationnel projectif

$$\pi :\ \mathcal{Y} \to \mathcal{X}$$

tel que $RégP(\mathcal{Y}) = \mathcal{Y}$ (resp. et de plus $\pi^{-1}(RégP(\mathcal{X})) \simeq RégP(\mathcal{X})$).

Ce théorème affirme donc l'existence d'un modèle globalement P-régulier au-dessus de $\mathcal{X}$ (resp. d'une P-désingularisation). Décrivons maintenant les axiomes (P1)-(P6). L'axiome (P5) est l'existence de P-uniformisation locale pour toute valuation v (définition 5.2). On demande la validité de (P1)-(P4) et de (P6) pour tout modèle projectif $\mathcal{Y}$ de K :

(P1) $\mathrm{RégP}(\mathcal{Y})$ est un ouvert de Zariski non vide.

(P2) $\mathrm{RégP}(\mathcal{Y})$ est stable par normalisation et localement stable par éclatement de point normalisé.

(P3) soit $C \subset \mathcal{Y}$ une courbe intègre à point générique dans $\mathrm{RégP}(\mathcal{Y})$. Il existe une suite d'éclatements normalisés de points fermés

$$\mathcal{Y}' \to \mathcal{Y},\ C' := \text{transf. stricte de } C,$$

telle que C' est permise au-dessus de $C' \cap \mathrm{RégP}(\mathcal{Y}')$.

(P4) tout éclaté de $\mathcal{Y}$ admet une P-désingularisation au-dessus de $\text{RégP}(\mathcal{Y})$ (cofinalité locale des P-désingularisations).

(P6) idem que (P3) mais avec de plus $C' \subset \text{RégP}(\mathcal{Y}')$.

La notion de permissibilité des courbes est cruciale dans (P3) et (P6). On dit qu'un point $z \in C \cap \text{RégP}(\mathcal{Y})$ est permis si l'éclaté de $\mathcal{Y}$ le long de C reste P-régulier au-dessus de z, et que ceci reste vrai après éclatements normalisés de points successifs au-dessus de z. Dans le cas de la propriété usuelle de régularité, c'est-à-dire lorsque

$$\text{RégP}(\mathcal{Y}) = \{y \in \mathcal{Y} : \mathcal{O}_{\mathcal{Y},y} \text{ est régulier}\},$$

ces axiomes sont vérifiés parce que :

(P3) l'éclaté d'une variété régulière $\mathcal{Y}$ le long d'une courbe régulière C est régulier ;

(P6) une variété $\mathcal{Y}$ peut être rendue équimultiple le long d'une courbe C par éclatements de points normalisés.

Dans un cadre axiomatique, il est par contre indispensable de formuler (P3) et (P6) ; il est en effet facile de construire des contre-exemples à la conclusion du théorème 5.1 en l'absence de (P3) ou de (P6).

Ces axiomes ont un champ d'application important et on peut citer les propriétés de régularité suivantes P_m, P_δ et $P_{\mathcal{Z}}$:

$\text{RégP}_m(\mathcal{Y}) := \{y \in \mathcal{Y} : e(y) < m\}$ pour $m \geq 2$ fixé, où e désigne la fonction multiplicité.

$\text{RégP}_\delta(\mathcal{Y}) := \{y \in \mathcal{Y} : \delta \text{ est log-élémentaire}\}$ pour $0 \neq \delta \in \text{Der}_k K$ une dérivation en caractéristique zéro.

$\text{RégP}_{\mathcal{Z}}(\mathcal{Y}) := \{y \in \mathcal{Y} : \mathcal{Y} \to \mathcal{Z} \text{ est l.c.c.r.}\}$ en caractéristique zéro, $\mathcal{Z}$ modèle régulier au sens usuel, où l.c.c.r. signifie "localement composition d'éclatements de centre régulier".

Il faut signaler ici que le théorème 5.1 a en fait permis à F. Cano, C. Roche et M. Spivakovsky de démontrer l'existence de P_δ-désingularisations grâce à leur preuve de la P_δ-Uniformisation Locale [29].

De même, il n'existe pas à ma connaissance d'autre preuve de l'existence de $P_{\mathcal{Z}}$-désingularisation. Il s'agit d'une version faible de la célèbre conjecture de factorisation forte de Hironaka par éclatements et contractions de centres lisses [51][13][99] et qui reste ouverte en dimension trois. La validité de (P5) pour la propriété $P_{\mathcal{Z}}$ est, lorsque car$k = 0$, un théorème difficile dû à D. Cutkosky [37]. Lorsque car$k = p > 0$, il s'agit d'un problème ouvert.

La validité de (P5) pour la propriété de régularité P_m (avec $m = 2$ et car$k = p > 0$) est le résultat principal de l'article [H8] quand $[k : k^p] < \infty$ (voir la prépublication [A7] pour le cas général).

Enfin, l'article [H9] ouvre de nombreuses perspectives. En effet, il renouvelle d'une part la question de définition d'algorithmes de Résolution de nature géométrique. Pour donner un exemple concernant la propriété P_m, on peut poser la question suivante : existe-t'il un algorithme défini en termes des lieux singuliers $\mathrm{SingP}_m(\mathcal{Y})$ qui construise une P_m-désingularisation, avec

$$m = \max\{e(y), y \in \mathcal{Y}\}?$$

La construction de P_m-désingularisations est posée en toute dimension dans [97] par O.Villamayor.

D'autre part, je pose dans la section 7 de [H9] les questions de reformulation des axiomes (P1)-(P6), ainsi que de leur redondance sous réserve que le théorème 5.1 reste valide. De même, [H9] proposition 7.3 montre que les axiomes (P1)-(P6) n'impliquent pas en général l'existence d'une P-désingularisation par éclatements normalisés de centres intègres (en particulier par éclatements permis). Ce contre-exemple est basé sur l'étude des limites de suites quadratiques fournie par [89]. Ceci pose bien entendu le problème de formulation d'axiomes pour ce type de P-désingularisation.

L'approximation galoisienne d'Abhyankar a été introduite dans [1] pour résoudre le problème d'Uniformisation Locale pour les surfaces en caractéristique $p > 0$. Celui-ci est en effet simplifié de manière importante lorsqu'on l'énonce pour des équations purement inséparables du type :

$$h = y^p + f(u_1, u_2), \ f \in k[[u_1, u_2]]. \tag{5.1}$$

S. Abhyankar montre qu'il suffit d'uniformiser les équations d'Artin-Schreier de degré p pour savoir uniformiser les surfaces. Ces équations se traitent par une variation des méthodes d'uniformisation dans le cas purement inséparable (5.1) ci-dessus.

L'article [H7], en collaboration avec V. Cossart, montre qu'une même réduction est disponible en dimension trois. Plus précisement :

Théorème 5.2. ***([H7], théorème 3.3).***
Soit k un corps de caractéristique $p > 0$. On suppose que pour toute k-algèbre locale (R, M) régulière de dimension trois, essentiellement de type fini sur k et pour toute hypersurface intègre :

$$\mathcal{X} := \mathrm{Spec}\left(\frac{R[y]}{(h)}\right), \ h = y^p - g^{p-1}y + f, \ f, g \in R,$$

il existe une uniformisation locale pour chaque $v \in \mathrm{Zar}(\mathcal{X})$.

Alors il existe une uniformisation locale pour toute variété algébrique $\mathcal{Y}|k$ de dimension trois et pour chaque $v \in \mathrm{Zar}(\mathcal{Y})$.

La preuve de ce résultat est longue. Elle s'appuie sur le théorème de Krull rappelé en (3.3). Soit $K := K(\mathcal{Y})$. En considérant une extension finie $K|k(x_1, x_2, x_2)$ et sa clôture normale $L|K$, on se ramène par (3.3) à des questions de montée ou de descente de l'Uniformisation Locale dans des extensions élémentaires. C'est le contenu de l'approximation galoisienne, résultat dû essentiellement à Abhyankar, et reformulé plus précisement en [H7] proposition 7.2.

La montée est délicate dans le seul cas des extensions purement inséparables ou d'Artin-Schreier de degré p : ce sont celles qui apparaissent dans l'énoncé du théorème 5.2. La descente est requise dans des extensions galoisiennes modérément ramifiées ou dans des extensions immédiates, mais non nécessairement galoisiennes. Ce sont ces dernières qui causent la plus grande difficulté et la démonstration de [H7] proposition 9.1 résoud une difficulté substantielle. Ces techniques jouent aussi un rôle important dans la réduction analogue de l'Uniformisation Locale des schémas quasi-excellents de dimension trois aux hypersurfaces formelles, ce qui a été accompli dans [A7].

5.2 Le polyèdre caractéristique.

Le polyèdre caractéristique d'une singularité a été introduit par H. Hironaka dans [53]. Il s'agit d'un outil important pour associer un polyèdre rationnel à un germe singulier plongé dans un espace régulier

$$(\mathcal{X}, x) \hookrightarrow (\mathcal{Z}, x).$$

Celui-ci est muni d'une "projection", c'est-à-dire du choix d'un s.r.p.

$$(u_1, \ldots, u_n, y_1, \ldots, y_r)$$

de $R := \mathcal{O}_{\mathcal{Z},x}$. Il permet en particulier la construction d'invariants associés aux singularités de $\mathcal{X}$. Je le définis ici dans le seul cas d'une hypersurface, soit $r = 1$.

Soit $(\mathcal{X}, x) = \mathrm{Spec}(R/(h))$ une hypersurface de dimension $n \geq 1$ telle que

$$V(u_1, \ldots, u_n) \not\subseteq (\mathcal{X}, x).$$

On pose

$$m := \mathrm{ord}_x(h \frac{R}{(u_1, \ldots, u_n)}) \geq 1.$$

Il existe un développement :

$$h = \delta y^m + \sum_{(i,\mathbf{a}) \in S(h)} \gamma(i, \mathbf{a}) y^{m-i} \prod_{j=1}^{n} u_j^{a_j}, \;\; \delta, \gamma(i, \mathbf{a}) \in R \text{ inversibles}, \tag{5.2}$$

pour un ensemble *fini* d'indices ou support :

$$S(h) \subset \{1, \ldots, m\} \times \frac{1}{m!}\mathbb{N}^n.$$

On définit alors un polyèdre rationnel (puisque $S(h)$ est fini) :

$$\Delta(h; u_1, \ldots, u_n; y) := \mathrm{Conv}\left(\bigcup_{(i,\mathbf{a}) \in S(h)} \left\{ \frac{\mathbf{a}}{i} + \mathbb{R}^n_{\geq 0} \right\} \right) \subseteq \mathbb{R}^n_{\geq 0}. \tag{5.3}$$

Le théorème de Hironaka [53] théorème 4.8 s'énonce dans ce contexte de la manière suivante :

Théorème 5.3. ***(Hironaka).***
Il existe $z \in \hat{R}$ tel que $(u_1, \ldots, u_n, z)$ est un s.r.p. de $\hat{R}$ et pour lequel

$$\Delta(h; u_1, \ldots, u_n; z) = \Delta(h; u_1, \ldots, u_n) := \bigcap_{\hat{y}} \Delta(h; u_1, \ldots, u_n; \hat{y}),$$

où l'intersection est prise sur tous les $\hat{y} \in \hat{R}$ tels que $(u_1, \ldots, u_n, \hat{y})$ est un s.r.p. de $\hat{R}$.

Le résultat principal de [H11], en collaboration avec V. Cossart, consiste à s'affranchir des changements de coordonnées formels. En effet, l'existence de Résolution des Singularités est attendue sous réserve de l'hypothèse de quasi-excellence. Celle-ci requiert en particulier que les fibres géométriques du morphisme de complétion formelle $R \subseteq \hat{R}$ soient régulières. On dit alors que R est un G-anneau. La construction d'invariants des singularités ayant de bonnes propriétés nécessite donc l'utilisation de cette hypothèse. Nous montrons :

Théorème 5.4. ***([H11], théorème 3.3).***
Avec les notations de la proposition 5.3 ci-dessus, on suppose de plus que R est un G-anneau. Il existe $z \in R$ tel que $(u_1, \ldots, u_n, z)$ est un s.r.p. de R et pour lequel

$$\Delta(h; u_1, \ldots, u_n; z) = \Delta(h; u_1, \ldots, u_n).$$

Ce résultat est obtenu grâce à une modification de l'algorithme de Hironaka calculant le polyèdre caractéristique. Cette modification consiste à résoudre (ou encore éliminer) non seulement des sommets de polyèdres successifs $\Delta(h; u_1, \ldots, u_n; y_i)$, mais aussi des faces de dimension strictement positive.

On remarque enfin que ce résultat est particulièrement utile pour étudier les variations du polyèdre caractéristique le long d'un sous-schéma $\mathcal{Y} \subset \mathcal{X}$. En effet, le théorème 5.4 permet de comparer -*via* l'équation (5.2)- les polyèdres $\Delta(h; u_1, \ldots, u_n)$ calculés en différents $x' \in \mathcal{U}$, où $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{Y}$ est un voisinage de Zariski de x. L'exemple final 3.2 de [H11] montre un tel calcul pour un certain

$$\mathcal{X} \subset \mathrm{Spec}\mathbb{Z}[u_1, u_2, y].$$

Voir la section Perspectives pour un résultat de constructibilité d'invariant associé à $(\mathcal{X}, x)$, et où le théorème 5.4 joue un rôle important.

5.3 Existence de désingularisation.

Cette section concerne les résultats de désingularisation proprement dite en dimension trois, à savoir [H8] et dans une moindre mesure [H10], en collaboration avec V. Cossart. Rappelons tout d'abord le théorème démontré par S. Abhyankar (1966) dans la première édition de [5].

Théorème 5.5. ***(Abhyankar).***
Soit k un corps algébriquement clos de caractéristique $p \geq 7$ et $K|k$ un corps de fonctions de dimension trois. Il existe un modèle projectif $\mathcal{Y}|k$ de $K|k$ qui est régulier en tout point.

Ce résultat est un indice important d'existence de désingularisation en dimension trois. Il se réduit par le théorème de recollement de Zariski à l'Uniformisation locale des valuations. Rappelons quelques points relatifs à sa preuve (voir le compte-rendu de H. Hironaka à la première édition de [5] ou [39] pour une explication plus détaillée). Soit $K|k$ un corps de fonctions de dimension $n \geq 1$.

Tout d'abord, on utilise un argument de nature complètement géométrique dû à Albanese. Si $K|k$ est un corps de fonctions de dimension $n \geq 1$, il montre l'existence d'un modèle projectif $\mathcal{X}|k$ de $K|k$ dont tout point a multiplicité au plus $n!$. Celui-ci est obtenu par un argument ingénieux de projections stéréographiques successives depuis des points de multiplicité maximale d'un modèle donné $\mathcal{X}_0|k$, appliqué à un plongement de Veronese de degré suffisant.

Lorsque $n = 3$, on a donc $n! = 6$. Localement en un point singulier $x \in \mathcal{X}$, il existe une normalisation de Noether :

$$(\mathcal{X}, x) \longrightarrow (\mathbb{A}^3_k, 0)$$

de degré local au plus 6. La variété $\mathcal{X}$ est donc localement en x la normalisation d'une hypersurface de multiplicité au plus 6 dans l'espace affine $\mathbb{A}^4_k$. Étant donnée une valuation $v \in \mathrm{Zar}(\mathcal{X})$ centrée en x, il suffit pour uniformiser v de savoir l'uniformiser sur cette hypersurface. Celle-ci est donnée, disons formellement pour simplifier, par une équation

$$h = y^m + \sum_{i=1}^{m} f_i(u_1, u_2, u_3) y^{m-i}, \ \ f_i \in k[[u_1, u_2, u_3]] \tag{5.4}$$

avec $m \leq 6$. Lorsque $p \geq 7$, on a donc $m < p$. On peut en particulier appliquer la transformation de Tschirnhausen

$$y' = y + \frac{1}{m} f_1(u_1, u_2, u_3) \tag{5.5}$$

pour obtenir une nouvelle équation du type (5.4) avec $f_1 = 0$. Celle-ci permet de réduire la multiplicité de h en travaillant sur l'idéal des coefficients

$$I := (f_2^{\frac{m!}{2}}, \ldots, f_m^{\frac{m!}{m}}). \tag{5.6}$$

Il s'agit maintenant d'un problème de Résolution Plongé dans un espace régulier de dimension trois, problème résolu par Abhyankar. On remarque que cette démonstration ingénieuse évite toute difficulté causée par la ramification sauvage en dimension trois. Nous démontrons dans [H8] :

Théorème 5.6. ***([H8] théorème principal p.1839).***
Soit k un corps de caractéristique $p > 0$ tel que $[k : k^p] < \infty$ et $\mathcal{X}|k$ une variété algébrique quasi-projective réduite. Il existe un morphisme projectif et birationnel $\pi : \widetilde{\mathcal{X}} \rightarrow \mathcal{X}$ tel que

$$\textit{Rég}\widetilde{\mathcal{X}} = \widetilde{\mathcal{X}} \text{ et } \pi^{-1}(\textit{Rég}\mathcal{X}) \simeq \mathcal{X}.$$

Ce résultat étend donc le théorème d'Abhyankar aux petites caractéristiques $p \leq 5$ et aux corps de base tels que $[k : k^p] < \infty$. Contrairement au résultat d'Abhyankar (théorème 5.5) ci-dessus, il n'évite pas les difficultés causées par la ramification sauvage en dimension trois. Ce résultat s'appuie sur le théorème de recollement de Zariski [106][32], sur l'article [H7] et sur les techniques développées par V. Cossart dans [31]. Celles-ci construisent une désingularisation pour les hypersurfaces d'équation

$$h = y^p + f(u_1, u_2, u_3). \tag{5.7}$$

Au vu du théorème 5.2, il s'agit donc détendre ces résultats aux hypersurfaces d'Artin-Schreier

$$\mathcal{X} := \mathrm{Spec}\left(\frac{R[y]}{(h)}\right),\ h = y^p - g^{p-1}y + f, f, g \in R, \tag{5.8}$$

où (R, M, l) est un anneau local régulier de dimension trois, essentiellement de type fini sur k. Mais il s'agit avant tout de revisiter les techniques de [31] en tenant compte des simplifications apportées par l'Uniformisation Locale. L'article [H8] contient en particulier une synthèse des difficultés apparaissant en dimension trois pour résoudre le problème de Résolution des Singularités. Il a servi de base aux résultats de la prépublication [A7].

Il convient de signaler ici que, du point de vue du résultat, le théorème de M. Temkin [93] réduit le théorème 5.6 à l'Uniformisation Locale des équations purement inséparables $g = 0$ de (5.8). Il redémontre donc ce résultat modulo [31].

Énonçons un corollaire immédiat au théorème 5.6. Il s'agit d'un résultat de base pour l'étude des espaces d'arcs tracés sur les variétés algébriques, introduits par J. Nash [78] dans les années 1960.

L'espace d'arcs $\mathcal{X}_\infty|k$ d'une variété algébrique $\mathcal{X}|k$ a pour A-points, avec $k \subseteq A$, les k-morphismes

$$h: \ \mathrm{Spec} A[[t]] \longrightarrow \mathcal{X}.$$

Il n'est donc pas de type fini sur k dès que $\dim \mathcal{X} > 0$. Il permet notamment de construire des invariants des variétés singulières (voir par exemple [44][59]). J. Nash a observé en caractéristique zéro que la Résolution des Singularités fournit le résultat de finitude suivant (son observation s'adapte également à la caractéristique positive, *cf.* [84]). Je ne connais pas d'autre démonstration de celui-ci :

Corollaire 5.7. *Soit k un corps parfait de caractéristique $p > 0$, $\mathcal{X}|k$ une variété algébrique de dimension trois et*

$$p : \mathcal{X}_\infty \longrightarrow \mathcal{X}$$

la projection. Alors $p^{-1}(\mathrm{Sing}\mathcal{X})$ a un nombre fini de composantes irréductibles.

La démonstration du théorème 5.6 est longue. Pour en donner quelques ingrédients, disons tout d'abord qu'elle s'appuie sur le théorème de Hironaka sur le polyèdre caractéristique. On choisit un s.r.p. (u_1, u_2, u_3) de R et un diviseur à croisements normaux

$$E = \mathrm{div}(u_1 \dots u_e), \ 1 \leq e \leq 3.$$

Soit $z = y + \theta(u_1, u_2, u_3)$ vérifiant la conclusion du théorème 5.3. On suppose sans perte de généralité que $z = y$ avec

$$f \in \hat{R} \simeq l[[u_1, u_2, u_3]] \tag{5.9}$$

On peut par éclatements préparatoires supposer de plus que

$$(g) = (u_1^{a_1} \cdots u_e^{a_e})$$

est un monôme lorsque $g \neq 0$. Pour $x \in \mathcal{X}$, on note :

$$H(x) := (\mathrm{gcd}\,(g^p, f)_E) = (u_1^{H_1} \cdots u_e^{H_e}).$$

Le module des formes différentielles absolues à pôle logarithmique le long de E est

$$\Omega_R(\log E) = \sum_{i=1}^{s} Rd\lambda_i \oplus \left(\bigoplus_{j=1}^{e} R\frac{du_j}{u_j} \right) \oplus \left(\bigoplus_{j=e+1}^{3} Rdu_j \right),$$

où on a noté $\lambda_1, \ldots, \lambda_s$ une p-base de k, celle-ci étant finie par l'hypothèse $[k : k^p] < \infty$. On note $\mathcal{D} \subset \mathrm{Dér}(R)$ le module dual de dérivations. Celles-ci s'étendent à $\hat{R}$ et permettent de construire un invariant appelé *multiplicité différentielle* :

$$\omega(x) := \min\{\mathrm{ord}_M(H(x)^{-1}(g^p, \{D \cdot f : D \in \mathcal{D}\}))\}. \tag{5.10}$$

Ce minimum est calculé sur les choix possibles de z comme ci-dessus et constitue l'invariant principal associé à la singularité $(\mathcal{X}, x)$. Bien sûr, la multiplicité de $(\mathcal{X}, x)$ est toujours $e(x) \leq p$.

Je signalerai simplement que la plus grande difficulté à laquelle il faut faire face est l'absence de notion de contact maximal en caractéristique positive. On n'obtient donc pas d'énoncé de projection comme dans (5.5)-(5.6). Il faut alors procéder pas à pas et associer à la singularité $(\mathcal{X}, x)$ des invariants numériques qui n'augmentent pas, ou qui augmentent de manière contrôlée.

On peut citer H. Hironaka's dans [53] p.254 : "*dans le cas de dimension trois ou plus, le comportement du [polyèdre caractéristique par éclatement] s'avère être bien plus compliqué et n'a pas encore été complètement étudié [...] quelques expérimentations m'ont conduit à l'aphorisme : la Résolution des Singularités consiste à rendre les polyèdres plus pointus.*" Dans la mise en pratique de cet aphorisme, on observe dans [H8] :

(1) désingulariser $(\mathcal{X}, x)$ est un problème simple lorsque $e(x) < p$, *cf.* (5.4)-(5.6).

(2) la fonction $x \mapsto \omega(x)$ est semicontinue supérieurement sur le lieu

$$\mathrm{Sing}_p\mathcal{X} := \{x \in \mathcal{X} : e(x) = p\},$$

mais ceci est propre aux dimensions $n \leq 3$.

(3) on doit utiliser une nouvelle notion d'éclatement permis pour les courbes, plus restrictive que celle de Hironaka, pour que $\omega(x)$ n'augmente pas par de tels éclatements. Celle-ci prend en compte le caractère différentiel de (5.10).

(4) la directrice $\mathrm{VDir}(x)$ associée aux termes initiaux de (5.10) a un mauvais comportement par éclatement permis : on passe d'une directrice transverse à E à une directrice tangente sans contrôle apparent.
(5) le rôle joué par les petites caractéristiques $p \leq 5$, par les corps résiduels non parfaits, et même par l'hypothèse $[k : k^p] < \infty$ suggérée par Grothendieck est faible dans cette approche.

Il faut également signaler que le comportement des multiplicités différentielles $\omega(x)$ (5.10) et des éclatements permis de (3) est similaire à celui qui apparaît dans les problèmes de Résolution des Singularités pour les formes différentielles et les champs de vecteurs [88][27][28][29][73][81], ou bien de Toroïdalisation des morphismes [41][38].

Enfin, l'article [H10] constitue un premier pas en direction des schémas d'inégale caractéristique. La démonstration étend le résultat d'Abhyankar cité en (1) ci-dessus à ce cadre :

Théorème 5.8. ***([H10] théorème 1.3).***
Soit (R, M, k) un anneau local régulier excellent de dimension quatre et

$$\mathcal{X} = \mathrm{Spec}\left(\frac{R}{(h)}\right)$$

une hypersurface réduite de multiplicité $e(x) < p := \mathrm{car} k$. Soit $v \in \mathrm{Zar}(\mathcal{X})$ une valuation centrée en x. Il existe une suite finie d'éclatements locaux permis au sens de Hironaka :

$$(\mathcal{X} =: \mathcal{X}_0, x_0) \longleftarrow (\mathcal{X}_1, x_1) \longleftarrow \cdots \longleftarrow (\mathcal{X}_r, x_r), \tag{5.11}$$

où $x_i \in \mathcal{X}_i$ est le centre de v, telle que $(\mathcal{X}_r, x_r)$ est régulier.

6 Perspectives.

Dans ce chapitre de conclusion, je traite seulement des perspectives données par les articles [H1,4,5,7-11] en laissant de côté les textes relatifs aux pinceaux à l'infini. Ceci correspond à mon activité principale de recherche actuelle qui s'articule autour de la ramification des morphismes en caractéristique résiduelle positive et de la Résolution des Singularités.

Les premières perspectives sont *a posteriori*, puisqu'il s'agit des résultats obtenus dans [A7], en collaboration avec V. Cossart. Il y est démontré :

Théorème 6.1. ***([A7] théorème 1.1).***
Soit $\mathcal{X}$ un schéma noethérien séparé réduit et quasi-excellent, de dimension trois. Alors il existe une Résolution des Singularités de $\mathcal{X}$.

Il s'agit donc d'une preuve de la Conjecture de Grothendieck en dimension trois. Un corollaire immédiat pour les variétés arithmétiques est :

Corollaire 6.2. ***([A7] corollaire 1.3).***
Soit $\mathcal{O}$ un anneau de Dedekind excellent de corps des fractions F et Σ/F une surface projective régulière. Il existe un $\mathcal{O}$-schéma propre et plat $\mathcal{X}$ de fibre générique $\mathcal{X}_F = \Sigma$ et qui est partout régulier.

Il s'agissait dans un premier temps de réinterpréter le recollement de Zariski et la réduction galoisienne d'Abhyankar dans le contexte des schémas quasi-excellents, à savoir les deux articles [H7] et [H9]. S'il n'apparaît aucune difficulté notable pour le premier, il n'en est pas de même pour le second. J'énonce ci-dessous la version correspondante du théorème 5.2. Elle contient en particulier une réduction qui n'est pas évidente au cas local complet.

Proposition 6.3. ***([H7], proposition 4.6).***
On suppose que pour tout anneau local complet (R, M, k) de dimension trois, $\mathrm{car} k = p > 0$, et pour toute hypersurface intègre d'équation

$$\mathcal{X} := \mathrm{Spec}\left(\frac{R[y]}{(h)}\right),\ h = y^p + \sum_{i=1}^{p} f_i y^{p-i},\ f_1, \ldots, f_p \in R, \qquad (6.1)$$

telle que :
(i) $\mathrm{car} R = p$ *et* $f_1 = \cdots = f_{p-1} = 0$*, ou*
(ii) $\mathcal{X}$ *est* G*-invariant, avec* $G := \mathrm{Aut}_R(K(\mathcal{X})) = \mathbb{Z}/p$,

il existe une uniformisation locale pour chaque $v \in \mathrm{Zar}(\mathcal{X})$.

Alors il existe une uniformisation locale pour tout schéma noethérien séparé réduit et quasi-excellent $\mathcal{Y}$, de dimension trois et pour chaque $v \in \mathrm{Zar}(\mathcal{Y})$.

Mais la difficulté la plus substantielle consiste à s'affranchir du corps de base, en particulier des développements en série formelle (5.9). Ceci a d'ailleurs motivé la rédaction de [H11]. On introduit systématiquement les gradués

$$\mathrm{gr}_\alpha R \simeq k[U_1, U_2, U_3]$$

de R par rapport aux valuations monomiales définissant les faces compactes du polyèdre caractéristique $\Delta(h; u_1, u_2, u_3)$. Lorsque $\mathrm{Sing}_p\mathcal{X} \subseteq \mathrm{div}(p)$, ces $\mathrm{gr}_\alpha R$ sont d'égale caractéristique p. On peut alors leur appliquer les techniques déjà développées dans [H8] et en particulier considérer

$$\Omega_{\mathrm{gr}_\alpha R}(\log E),\ E = \mathrm{div}(U_1 \cdots U_e). \tag{6.2}$$

Ces constructions sont effectuées pour $d = \dim R$ arbitraire. Elles permettent de définir une fonction $x \mapsto \omega(x)$ et une notion d'éclatement permis ayant de bonnes propriétés, *cf.* (2) et (3) ci-dessus, pour tout $d \geq 1$. Une différence importante est que

$$x \mapsto (e(x), \omega(x))$$

est seulement une fonction constructible, mais non semicontinue supérieurement en général ([A7] corollaire 3.12). Il est également montré que cette fonction est invariante par changement de base local régulier $R \subset S$ avec S excellent ([A7] théorème 2.20).

Enfin les difficultés causées par (4) n'ont pu être résolues que lorsque $d = 3$. On obtient un théorème plus fort d'Uniformisation Locale pour $\mathcal{X}$, qui s'énonce en termes d'éclatements locaux permis comme le théorème 5.8. Ceci est un indice encourageant pour résoudre les variétés de dimension trois munis de l'action d'un groupe fini G.

D'autres perspectives à plus long terme sont suscitées par l'ensemble des articles [H1,4,5,7,8,10]. Ils possèdent en effet tous un point commun : la ramification des valuations. On y fixe une extension finie de corps $L|K$ et une extension correspondante de valuations $w|v$. L'extension $L|K$ est de dimension deux et donnée [H1,4,5], ou de dimension trois dans [H7,8,10]. Il s'agit d'une projection générique (d'un point singulier x de multiplicité p avec $[L:K]=p$ dans [H8]).

Dans le cas où $w|v$ est modérément ramifiée, mais aussi dans le cas où $w|v$ est sauvagement ramifiée mais sans défaut, on observe dans [H5] (théorème 4.5) et dans [H7] proposition 6.3 que les résultats sont analogues à ceux de caractéristique zéro. Il s'agit alors d'obtenir une démonstration de nature purement algébrique.

Lorsque le défaut intervient, les énoncés ne sont plus les mêmes. Dans un travail en préparation avec F.V. Kuhlmann (U. Katowice), nous exprimons ce phénomène en termes de distance dans les corps valués [67] et d'idéaux de ramification supérieure [109]. Il apparaît alors des coupures non principales du groupe de valeur et des idéaux de ramification qui ne sont pas de type fini. Ceci montrerait qu'on ne peut pas attendre de résultat du type du théorème 4.3 en présence de défaut ; celui-ci s'exprimerait comme un phénomène "limite" comme dans le théorème 4.6.

En ce qui concerne la Résolution des Singularités en dimension $n \geq 4$, il me semble possible d'avancer prudemment deux conclusions partielles du point de vue de la théorie de la ramification :

(1) le polyèdre caractéristique de Hironaka, ou plus exactement son *squelette* contient tous les invariants nécessaires pour démontrer un théorème d'Uniformisation Locale par éclatements locaux permis au sens de Hironaka dans le cas des équations (6.1). Il est donc naturel de l'utiliser en dimension $n \geq 4$. Voir [34][86][87] pour quelques faits encourageants.
(2) les formes différentielles à pôle logarithmique (6.2) jouent également un rôle important. Il s'agit de la définition et du contrôle des invariants de Résolution par éclatement dans [H8] et [A7], ou du calcul des idéaux de ramification dans [H5].

Références

[1] Abhyankar S., Local uniformization on algebraic surfaces over ground fields of characteristic $p \neq 0$, *Ann. of Math.* **63** (1956), 491-526.

[2] Abhyankar S., On the valuations centered in a domain, *Amer. J. Math.* **78** (1956), 321-348.

[3] Abhyankar, S., Simultaneous resolution for algebraic surfaces, *Amer. J. Math* **78** (1956), 761-790.

[4] Abhyankar S., Ramification theoretic methods in algebraic geometry, *Ann. of Math. Studies* **43**, Princeton University Press (1959).

[5] Abhyankar S., Resolution of singularities of arithmetical surfaces, *Arithmetical Algebraic Geometry (Proc. Conf. Purdue Univ., 1963)*, Harper and Row (1965), 111-152.

[6] Abhyankar, S., Tame Coverings and fundamental groups of algebraic varieties, *Amer. J. Math.* **81** (1959), 46-94.

[7] Abhyankar S., Lectures on expansion techniques in algebraic geometry, *Tata Institute of Fundametal Research*, Bombay (1977).

[8] Abhyankar S., Resolution of singularities of embedded algebraic surfaces, second edition, *Springer Monographs in Math.*, Springer Verlag (1998).

[9] Abhyankar, S., Resolution of singularities and modular Galois theory, *Bull. Amer. Math. Soc.* **38**(2) (2001), 131-169.

[10] Abhyankar S. and Moh T.T., Newton-Puiseux expansion and generalized Tschirnhausen transformation, *J. Reine Angew. Math.* **260, 261** (1973), 47-83 and 29-54.

[11] Abhyankar S. and Moh T.T., Embeddings of the line in the plane *J. Reine Angew. Math.* **267** (1975), 148-166.

[12] Abramovich D., de Jong A.J., Smoothness, semistablility, and toroidal geometry, *J. Alg. Geom.* **6** (1997), 789-801.

[13] Abramovich D., Karu K., Matsuki K., Włodarczyk J., Torification and Factorization of Birational Maps, *J. Amer. Math. Soc.* **15** (2002), no. 3, 531-572.

[14] Akbulut, S. and King, H., Topology of algebraic sets, *MSRI publications* **25**, Springer-Verlag Berlin.

[15] Artal-Bartolo E., Une démonstration géométrique du théoréme d' Abhyankar-Moh, *J. Reine Angew. Math.* **464** (1995), 97-108.

[16] Artin M., On isolated rational singularities of surfaces, *Amer. J. Math.* **88** (1966), 129-136.

[17] Assi A., Meromorphic plane curves, *Math. Z.* **230** (1999), no. 1, 165-183.

[18] Benito A., Villamayor O., Monoidal transforms and invariants of singularities in positive characteristic, *Compos. Math.* **149** (2013), no. 8, 1267-1311.

[19] Benito A., Villamayor O., On elimination of variables in the study of singularities in positive characteristic, *preprint* arXiv :1103.3462.

[20] Berthelot P., Finitude et puret cohomologique en cohomologie rigide, avec un appendice par Aise Johan de Jong, *Invent. Math.* **128** (1997), no. 2, 329-377.

[21] Bierstone E., Milman, P., Canonical desingularization in characteristic zero by blowing up the maximum strata of a local invariant, *Invent. Math.* **128** (1997), 207-302.

[22] Bogomolov, F., Pantev, T., Weak Hironaka Theorem, *Math. Res. Lett.* **3** (1996), 299-307.

[23] Bravo A., Villamayor O., Singularities in positive characteristic, stratification and simplification of the singular locus, *Adv. Math.* **224** (2010), 1349-1418.

[24] Campillo A., Farrán J.I., Computing Weierstrass semigroups and the Feng-Rao distance from singular plane models, *Finite Fields Appl.* **6** (2000), no. 1, 71-92.

[25] Campillo, González-Sprinberg G., On characteristic cones, clusters and chains of infinitely near points, *Singularities. The Brieskorn annyversary volume* (Birkhäuser, 1998), 251-261.

[26] Campillo A., González-Sprinberg G., Lejeune-Jalabert M., Clusters of infinitely near points, *Math. Ann.* **306** (1996), 169-194.

[27] Cano F, Desingularization strategies for three-dimensional vector fields, *Lect. Notes in Math.* **1259**, Springer-Verlag (1987).

[28] Cano F, Reduction of the singularities of codimension one singular foliations in dimension three, *Ann. of Math.* (2) **160** (2004), no. 3, 907-1011.

[29] Cano F, Roche C., Spivakovsky M., Reduction of singularities of three-dimensional line foliations, *Rev. R. Acad. Cienc. Exactas Fs. Nat. Ser. A Math. RACSAM* **108** (2014), no. 1, 221-258.

[30] Cossart V., Resolution of surface singularities, in *Lect. Notes in Math.* **1101**, Springer-Verlag (1984), 79-98.

[31] Cossart V., Polyèdre caractéristique d'une singularité, *Thesis*, Université de Paris-Sud, Centre d'Orsay (1987), 1-424.

[32] Cossart V., Modèle projectif régulier et désingularisation, *Math. Ann.* **293** (1992), no.1, 115-122.

[33] Cossart V., Jannsen U., Saito S., Canonical embedded and non-embedded resolution of singularities for excellent two-dimensional schemes, *preprint* arXiv :0905.2191 (2009), 1-169.

[34] Cossart V., Schober B., Characteristic polyhedra of singularities without completion - Part II, *preprint* arXiv :1411.2522 (2014).

[35] Cutkosky, S.D., On unique and almost unique factorization of complete ideals II, *Invent. Math.* **98** (1989), no. 1, 59-74.

[36] Cutkosky S.D., Complete ideals in algebra and geometry, *Contemporary Math.* **159** (1994), 27-39.

[37] Cutkosky, S.D., Local monomialization and factorization of morphisms, *Astérisque* **260** (1999).

[38] Cutkosky S.D., Toroidalization of dominant morphisms of 3-folds, *Mem. Amer. Math. Soc.* **190** (2007).

[39] Cutkosky S.D., Resolution of singularities for 3-folds in positive characteristic, *Amer. J. Math.* **131** (2009), no. 1, 59-127.

[40] Cutkosky S.D., A skeleton key to Abhyankar's proof of embedded resolution of characteristic p surfaces, *Asian J. Math.* **15** (2011), no. 3, 369-416.

[41] Cutkosky S.D., A simpler proof of toroidalization of morphisms from 3-folds to surfaces, *Ann. Inst. Fourier 63* (2013), no. 3, 865-922.

[42] Cutkosky S.D., Ramification of valuations and counterexamples to local monomialization in positive characteristic, *preprint* arXiv :1404.7459 (2014).

[43] Denef J., Monomialization of morphisms and p-adic quantifier elimination, *Proc. Amer. Math. Soc.* **141** (2013), no. 8, 2569-2574.

[44] Denef J., Loeser F., Germs of arcs on singular algebraic varieties and motivic integration, *Invent. Math.* **135** (1999), no. 1, 201-232.

[45] Ghezzi L., Kashcheyeva O., Toroidalization of generating sequences in dimension two function fields of positive characteristic, *J. Pure Appl. Algebra* **209** (2007), no. 3, 631-649.

[46] Giraud J., Étude locale des singularités, Cours de $3^{\text{ème}}$ cycle, *Publ. Math. d'Orsay* **26**, Univ. Paris XI, Orsay (1972).

[47] Giraud J., Contact maximal en caractéristique positive, *Ann. Sci. Ec. Norm. Sup.* $4^{\text{ème}}$ série **8** (1975), no. 2, 201-234.

[48] Göhner H. Semifactoriality and Muhly's condition (N) in two dimensional local rings, *J. Algebra* **34** (1975), 403-429.

[49] Grothendieck A., Dieudonne J., Éléments de géométrie algébrique IV-2, *Publ. Math. I.H.E.S.* **24** (1965).

[50] Hartshorne R., Algebraic Geometry, *Graduate Texts in Mathematics* **52**, Springer-Verlag (1977).

[51] Hironaka H., Resolution of singularities of an algebraic variety over a field of characteristic zero, *Ann. of Math* **79** (1964), 109-326.

[52] Hironaka H., Desingularization of excellent surfaces, Advanced Science Seminar in Algebraic Geometry, Bowdoin College, Brunswick, Maine (1967).

[53] Hironaka H., Characteristic polyhedra of singularities, *J. Math. Kyoto Univ.* **7** 1967, no.3, 251-293.

[54] Hironaka H., Additive groups associated with points of a projective space, *Ann. of Math.* **92** (1970), 327-334.

[55] Hironaka H., Theory of infinitely near singular points, *J. Korean Math. Soc.* **40** (2003), no.5, 901-920.

[56] Hironaka H., Three key theorems on infinitely near singularities, Singularités Franco-Japonaises Paris 2005, in *Sémin. Congr. SMF* **10**, 87-126.

[57] Huneke C., Complete ideals in two-dimensional regular local rings, Commutative algebra (Berkeley, CA, 1987), 325-338, *Math. Sci. Res. Inst. Publ.* **15**, Springer, New York (1989).

[58] Illusie L., Laszlo Y., Orgogozo F., Travaux de Gabber sur l'uniformisation locale et la cohomologie étale des schémas quasi-excellents.

Seminaire a l'École Polytechnique 2006-2008, *preprint* arXiv :1207.3648 (2007), 1-416.

[59] Ishii S., Kollár J., The Nash problem on arc families of singularities, *Duke Math. J.* **120** (2003), no. 3, 601-620.

[60] de Jong A.J., Smoothness, semistability and Alterations, *Publ. Math. I.H.E.S.* **83** (1996), 51-93.

[61] Jung H., Darstellung der Funktionen eines algebraischen Körpers zweier unabhängigen Veränderlichen in der Umgebung einer Stelle, *Journal für Mathematik* **133** (1908), 289-314.

[62] Kaliman S., Two remarks on polynomials in two variables, *Pac. J. Math.* **154** (1992), 285-295.

[63] Kawanoue H., Toward resolution of singularities over a field of positive characteristic I. Foundation; the language of the idealistic filtration, *Publ. RIMS* **43** (2007), no. 3, 819-909.

[64] Kawanoue H., Matsuki K., Toward resolution of singularities over a field of positive characteristic (the idealistic filtration program) Part II. Basic invariants associated to the idealistic filtration and their properties, *Publ. RIMS* **46** (2010), no. 2, 359-422.

[65] Knaf H., Kuhlmann F.V., Every place admits local uniformization in a finite extension of the function field, *Adv. Math.* **221** (2009), 428-453.

[66] Krull W., Galoissiche Theorie bewerteter Körper, *Sitzungsberichte der Bayerischen Akaemie der Wissenschaften, München* (1930), 225-238.

[67] Kuhlmann, F.V., A classification of Artin-Schreier defect extensions and characterizations of defectless fields, *Illinois J. Math.* **54** (2010), no. 2, 397-448.

[68] Kuhlmann, F.V., The defect, *in* Commutative algebraNoetherian and non-Noetherian perspectives, 277-318, Springer, New York, (2011).

[69] Lipman, J., Rational singularities, with applications to algebraic surfaces and unique factorization, *Publ. Math. IHES* **36** (1969), 195-279.

[70] Lipman J., Introduction to resolution of singularities, in Algebraic Geometry, Arcata, 1974, Amer. math. Soc. proc. Symp,. Pure Math. 29 (1975), 187-230.

[71] Lipman J., Desingularization of two-dimensional schemes, *Ann. Math.* **107** (1978), 151-207.

[72] Lipman, J. On complete ideals in regular local rings, in *Algebraic geometry and commutative algebra*, Vol. I, 203-231, Kinokuniya, Tokyo, 1988.

[73] Mc Quillan M., Panazzolo D., Almost étale resolution of foliations, *J. Diff. Geom.* **95** (2013), no. 2, 279-319.

[74] Matsumura H., Commutative ring theory, 3rd edition, *Cambridge studies in advanced mathematics* **8**, Cambridge Univ. Press (1986).

[75] Moh T.T., On a Newton polygon approach to the uniformization of singularities of characteristic p, *in* Algebraic geometry and singularities (La Rábida, 1991), *Progr. Math.* **134** (1996), Birkhuser, 49-93.

[76] Moh T.T., On analytic irreducibility at infinity of a pencil of curves, *Proc. Am. Math. Soc.* **44** (1974), 22-23.

[77] Moh T.T., On the bound of d_2, *Rev. R. Acad. Cienc. Exactas Fís. Nat. Ser. A Math. RACSAM* **108** (2014), no. 1, 211-220.

[78] Nash J.F., Arc structure of singularities. A celebration of John F. Nash Jr., *Duke Math. J.* **81** (1995), no. 1, 31-38.

[79] Novacoski J., Spivakovsky M., Reduction of Local Uniformization to the rank one case, *preprint* arXiv :1204.4751 (2012), 1-22.

[80] Orgogozo F., Altérations et groupe fondamental premier à p, *Bull. SMF* **131** (2003), no. 1, 123-147.

[81] Panazzolo D., Resolution of singularities of real-analytic vector fields in dimension three, *Acta Math.* **197** (2006), no. 2, 167-289.

[82] Pinkham H., Courbes planes ayant une seule place à l'infini, *Sém. sur les singularités des surfaces*, (Ecole polytechnique, 1977).

[83] Raynaud M., Anneaux locaux henseliens, *Lect. Notes Math.* **169**, Springer-Verlag (1970).

[84] Reguera A., Towards the singular locus of the space of arcs, *Amer. J. Math.* **131** (2009), no. 2, 313-350.

[85] Roberts P., Recent developments on Serre's multiplicity conjectures : Gabber's proof of the nonnegativity conjecture, *Enseign. Math.* **44** (1998), no. 3-4, 305-324.

[86] Schober B., Idealistic exponents and their characteristic polyhedra, *preprint* arXiv :1410.6541 (2014).

[87] Schober B., A polyhedral approach to the invariant of Bierstone and Milman, *preprint* arXiv :1410.6543 (2014).

[88] Seidenberg A., Reduction of singularities of the differential equation $Ady = Bdx$, *Amer. J. Math.* **90** (1968), 248-269.

[89] Shannon, D.L., Monoidal transforms, *Amer. J. Math* **45** (1973), 284-320.

[90] Spivakovsky, M., Valuations in function fields of surfaces, *Amer. J. Math.* **112** (1990), 107-156.

[91] Teissier B., Valuations, Deformations and Toric Geometry, *in* Valuation theory and its applications, Vol. II (Saskatoon, SK, 1999), *Fields Inst. Commun.* **33** (2003), 361-459.

[92] Teissier B., Overweight deformations of affine toric varieties and local uniformization, *preprint* arXiv :1401.5204 (2014).

[93] Temkin M., Inseparable local uniformization, *J. Algebra* **373** (2013), 65-119.

[94] Vaquié M., Extension d'une valuation, *Trans. Amer. Math. Soc.* **359** (2007), no. 7, 3439-3481.

[95] Vaquié M., Famille admissible de valuations et dfaut d'une extension, *J. Algebra* **311** (2007), no. 2, 859-876.

[96] Villamayor O., Patching local uniformizations, *Ann. Sci. École Norm. Sup.* **25** (1992), no. 6, 629-677.

[97] Villamayor O., Equimultiplicity, algebraic elimination, and blowing-up, *preprint* arXiv :1312.7836 (2013).

[98] Włodarczyk J., Simple Hironaka resolution in characteristic zero, *J. Amer. Math. Soc.* **18** (2005), no. 4, 779-822.

[99] Włodarczyk, J., Toroidal varieties and the weak factorization theorem, *Invent. Math.* **154** (2003), no. 2, 223–331.

[100] Zariski, O., The reduction of the singularities of an algebraic surface, *Ann. Math.* **40** (1939), 639-689.

[101] Zariski O., Polynomial Ideals Defined by Infinitely Near Base Points, *Amer. J. Math.* **60** (1938), no. 1, 151-204.

[102] Zariski O., Local uniformization of algebraic varieties, *Ann. of Math.* **41** (1940), 852-896.

[103] Zariski O., A simplified proof for the resolution of singularities of an algebraic surface, *Ann. of Math.* **43** (1942), 583-593.

[104] Zariski, O., Foundations of a general theory of birational correspondences, *Trans. Amer. Math .Soc.* **53**, (1943), 490-542.

[105] Zariski, O., The compactness of the Riemann manifold of an abstract field of algebraic functions, *Bull. Amer. Math. Soc.* **45** (1944), 683-691.

[106] Zariski O., Reduction of the singularities of algebraic three dimensional varieties, *Ann. of Math.* **45** (1944), 472-542.

[107] Zariski O., The fundamental ideas of abstract algebraic geometry, *Proc. Int. Congress Math.* Vol. II (1950), 78-89, *in* Oscar Zariski : Collected Papers, Vol. 3, MIT Press (1978), 363-375.

[108] Zariski O. and Samuel P., Commutative Algebra I, 2nd edition, *Graduate Texts in Mathematics* **28**, Springer-Verlag (1979).

[109] Zariski O. and Samuel P., Commutative Algebra II, Van Nostrand, Princeton (1960).

Contribution à l'étude des singularités des schémas de dimension deux et trois en caractéristique résiduelle positive.
Résumé. Ce mémoire est une exposition de travaux de recherche consacrés à l'étude des singularités des schémas de dimension deux et trois et à la désingularisation en caractéristique résiduelle positive.

La première partie présente le problème de Résolution des Singularités ainsi que les principaux outils algébriques utilisés dans les travaux dont il est ici question (théorie des valuations, idéaux complets et éclatement) et leur lien avec celui-ci.

La deuxième partie regroupe deux types de contributions qui s'appuient sur la théorie des idéaux complets : à la ramification des morphismes considérée du point de vue de la théorie des valuations, et aux pinceaux de courbes à l'infini dans le plan.

La troisième partie traite de la Résolution des Singularités proprement dite. Elle compare les versions locale et globale de ce problème en dimension trois et expose un résultat d'algébricité du polyèdre caractéristique de Hironaka en toute dimension. Enfin, on y traite de la désingularisation en dimension trois et caractéristique positive.

Les perspectives concernent la Conjecture de Résolution de Grothendieck et le défaut en théorie des valuations.

Contributions to the study of two and three-dimensional singular schemes in positive residue characteristic.
Abstract. This is a report on research works on two and three-dimensional singular schemes in positive residue characteristic.

The first section introduces to the Resolution of Singularities problem and to the main algebraic tools used in these research works (valuation theory, complete ideals and blowing up), with a view to their interplay.

The second section gathers contributions based on the theory of complete ideals : to ramification of morphisms from the point of view of valuation theory, and to pencils of curves at infinity in the plane.

The third section deals with Resolution of Singularities, comparing its local and global versions in dimension three and showing an algebraicity result for the Hironaka characteristic polyhedron in any dimension. It concludes with building up resolutions in dimension three and positive characteristic.

Perspectives include Grothendieck's Conjecture on Resolution and understanding the defect in valuation theory.